Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Решения и критерии проверки

Ниже приведены решения задач и критерии проверки. В тексте встречаются ссылки на задачи из вариантов других классов; так, «задача 5.6» означает задачу №6 для 5-го класса.

Сроки проверки. «Первичная» проверка должна быть в основном закончена к 10 февраля. После этого ответственные за параллель могут перепроверять работы с высокими баллами и те, которые вызвали затруднения у проверяющих.

Оценивание работ. Максимальный балл за каждую задачу — 7 баллов. Допускаются только целые баллы.

Рекомендуется придерживаться следующего принципа. Если задача в целом решена верно, но в решении есть мелкие ошибки или пробелы в объяснениях, то ставится 5-6 баллов. Если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (не просто «что-то разумное написано», а именно существенные продвижения), то ставится 1-2 балла. Если продвижения *очень* существенны (человек понял практически всё, что нужно для решения задачи, но задачу по непонятной причине не решил), то можно поставить 3 балла. В целом оценки в 3 и особенно 4 балла рекомендуется ставить как можно реже.

Частные критерии описаны после решения каждой задачи. Они устроены примерно так:

Полное решение – описание того, что должно быть в семибалльном решении (а что не обязательно должно быть: например, от младших мы не всегда требуем чётких доказательств, а от старших – доказательства очевидных фактов).

Погрешности – недостатки решения, приводящие к снятию 1-2 баллов. Если в решении допущено несколько погрешностей, то происходит «частичное суммирование»: за две погрешности по 1 баллу вычитается 2 балла, но за несколько двухбалльных погрешностей всё равно в сумме снимается два балла, в крайнем случае – три. В общем, правило о том, что «задача в целом решена – ставь хотя бы 5, в крайнем случае 4», должно соблюдаться.

Продвижения – указано, за какие продвижения даются баллы, если задача в целом не решена. Здесь действует аналогичное правило «частичного суммирования» с потолком в 2, изредка 3 балла.

К «продвижениям» обычно относится наличие верного числового ответа при отсутствии решения (за ответ ставится 1 балл); однако если видно, что ответ получился верным совершенно случайно из абсолютно неверных соображений, то можно ставить 0. Верно угаданный ответ вида «да/нет» баллов не приносит.

Типичная «погрешность» - арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения. За неё снимается 1-2 балла (в зависимости от сложности задачи – чем проще задача, тем дороже стоит в ней дурацкая ошибка).

Разумеется, реальность разнообразнее заранее придуманных критериев. Тем не менее, надеемся, что они помогут оценивать работы более единообразно. Обо всех спорных случаях стоит сообщать ответственному за параллель, который выступает гарантом единообразия критериев. Критерии могут уточняться в первые дни (ответственные по параллелям могут уточнять их самостоятельно и сообщать проверяющим).

Заполнение таблицы с результатами. Результаты проверки работ нужно внести в xls-таблицу вместе с данными из анкет. Инструкция по указанию данных приведена ниже (вам может показаться, что она слишком подробная и занудная, но она должна облегчить сведение данных в общую таблицу).

- № - не заполняется.
- Параллель, Проверяющий – ваша фамилия и параллель, которую вы проверяете.
- E-mail организатора – с какого ящика присланы письма на ящик жюри (будьте внимательны: некоторые письма переслали с других ящиков). Организатор – название организатора в произвольной форме (например, город и школа в соответствии с указанными в теме письма).
- Страна – по-русски. Регион – без сокращений и без слова «Республика», например, «Минская область», «Татарстан». Населённый пункт: «Магнитогорск», «пос. Петрово Юрьевского района» (тип населённого пункта пишем для сёл, посёлков и т.д., но не для городов; если не райцентр, указываем район).
- «Сельская местность» и «Особые права» - пункты, добавленные по требованию СПбГУ для какой-то отчётности (типа «а сколько в вашей олимпиаде участвует инвалидов, сирот и детей из сельской местности?»); если ответ отсутствует или отрицательный, ничего не писать.
- Школа – например, «школа 56», «гимназия 5 с углублённым изучением математики», «лицей «Золотая горка»» и т.д. (без аббревиатур типа «ГБОУ»; вместо «СОШ» и «ООШ» пишем «школа»; символ № не используем; «имени Пушкина» или «при ДВГУ» оставляем).
- Класс – название класса с буквой.
- Кружок – занимается ли в кружке и где (ФИО руководителя, если это кружок при школе, можно не писать).
- E-mail – для участников с совсем слабыми работами можно не указывать. Если отсутствует e-mail, можно указать вместо него телефон.
- Фамилия, имя – ясно (отчество не нужно).
- 1–6 – баллы по задачам, итого – сумма.
- Примечание – в частности, нужно отмечать подозрения на списывание. Примечания по задачам (пр.1 – пр.6) – если не уверены в оценке или в этой задаче есть что-то интересное.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 7 класса

1. Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя выписала 9 чисел, а максимальное число, написанное на доске дважды, равно 50. Сколько всего различных чисел выписано на доске?

Решение. Заметим, что число, написанное дважды — это общий делитель исходных чисел; максимальное такое число — это их НОД. Значит, все числа, написанные дважды — делители числа 50, то есть числа 1, 2, 5, 10, 25, 50. То есть среди выписанных чисел ровно 6 повторяющихся, и количество различных чисел равно 10+9-6=13.

Критерии.

Пример решения на 7 баллов: «Числа 1,2,5,10,25,50 выписаны дважды, а все остальные числа — по одному разу; итого 13 разных чисел». То есть мы не требуем обоснования того, что не-делители числа 50 не могут повторяться, и даже явного указания этого факта. Не нужно доказывать и того, что число 50 не имеет других делителей.
Приводить пример, подтверждающий существование таких чисел, не требуется.

Погрешности. Написано, что у числа 50 шесть делителей, но никак не объясняется, почему их шесть — минус балл.
Не учтён один делитель числа 50 — минус балл, не учтено два делителя — минус два балла, не учтено больше — задача считается нерешённой. Аналогично с лишними делителями.

Человек считает, что «различными числами» названы только те, что по одному разу (тогда ответ 7) — минус балл.

Продвижения. Написано, что делители числа 50 повторяются, но делители не посчитаны или больше двух ошибок в подсчёте — 2 балла. Если при этом слово «делители» отсутствует (например, «1 и 50 повторяются, поэтому разных чисел 17») — 0 баллов.

Только ответ 13 — 1 балл.

2. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 36, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

Решение. Рассмотрим крайние вертикали и горизонтали. Уход с них внутрь прямоугольника не позволяет сократить периметр, но уменьшает площадь. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник. Если A и B — длины его сторон, то A+B=18.

Перебирая варианты (1, 17), (2, 16) и т.д. различных прямоугольников с периметром 36, находим, что наибольшее значение площади AB достигается, когда A=B=9, и эта площадь равна 81.

Критерии.

Полное решение состоит из двух частей: (1) доказать, что прямоугольники лучше остальных фигур и (2) доказать, что лучший из прямоугольников — квадрат.

Если (1) сформулировано, но никак не доказано, то задача не решена (макс. 2 балла). Если (2) сформулировано, но не доказано, то задача решена с недочётом (5 баллов). В качестве доказательства достаточно слов о том, что именно нужно перебрать.

Только ответ (или ответ с указанием, что это получается для квадрата) — 1 балл.

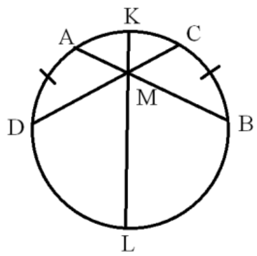
3. В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

Решение.

Способ 1.

Пусть AB, CD, EF — три хорды, M — их точка пересечения. Докажем, что фигура, состоящая из отрезков AB и CD, симметрична относительно одного из диаметров.

Действительно, поскольку хорды AB и CD равны, то равны и дуги ACB и CAD, на которые они опираются; поскольку дуга AC общая, то дуги AD и BC тоже равны. Пусть K и L — середины дуг AC и BD, тогда AK=KC, AD=CB, DL=LB. Тогда обе дуги KL состоят из соответственно равных частей, поэтому они равны между собой и KL — диаметр. В силу равенства дуг AK и KC, DL и LB фигура симметрична относительно диаметра.



Из этого следует, что точка M лежит на указанном диаметре. Но аналогично можно доказать, что M лежит на другом диаметре, который аналогично построен для хорд AB и EF (и на третьем — для хорд CD и EF). Это всё разные диаметры, т.к. например образ хорды AB при симметрии относительно первого — CD, а относительно второго — EF.

Итак, точка M лежит одновременно на трёх диаметрах, поэтому она — центр окружности. Все три хорды проходят через центр, значит, являются диаметрами.

Способ 2 (недоступный семиклассникам).

Заметим, что AM+MB=CM+MD и AM·MB=CM·MD (по теореме об отрезках пересекающихся хорд). Из этого нетрудно вывести, что AM=CM и BM=DM (или наоборот). Аналогично можно рассмотреть хорды AB и EF и получить, например, что AM=EM. Тогда M — центр окружности, проходящей через точки A, C и E, т.е. центр исходной окружности.

Критерии. По общим правилам.

В решении с использованием симметрии не доказано, что пара хорд симметрична относительно какого-нибудь диаметра — 5 баллов.

4. Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталось больше всего золота — 25 кг — и восьмая часть всего серебра. Сколько золота было в кладе?

Решение. 1) Старший брат получил 75 кг серебра, что является восьмой частью общего количества; значит, общая масса серебра равна 600 кг.

2) Остальные получили больше серебра, чем старший, т.е. каждый — больше 75 кг. Если братьев хотя бы восемь, то в сумме они получат больше 600 кг; значит, братьев не больше чем семеро.

3) Но хотя бы семеро их должно быть, т.к. масса серебра 600 кг, а значит, масса всего клада больше 600 кг. Значит, братьев семеро.

4) Общая масса клада 700 кг, поэтому масса золота 700-600=100 кг.

Критерии. Такие же, как в задаче 5.6.

5. Три человека хотят приехать из города A в город B, расположенный в 45 километрах от A. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до B, если велосипед нельзя оставлять на дороге без присмотра?

Решение. Двое проезжают 15 километров, потом один отправляется пешком, а второй остается стеречь оба велосипеда до прихода третьего.

Легко убедиться, что из аналогичных вариантов, отличающихся только выбором пункта остановки, наилучший – когда она точно посередине. Усложнения, включающие встречное движение, лишены смысла из-за того, что ни двое не могут ехать сразу на одном велосипеде, ни один – сразу на двух.

Критерии. Полное решение состоит из двух частей: описание того, как должны ездить велосипедисты, и доказательство того, что улучшить этот результат нельзя.
Если присутствует только одна из этих частей, то задача не решена, ставим 2 балла.

6. Лев взял два натуральных числа, прибавил их сумму к их произведению и в результате получил 1000. Какие числа мог взять Лев? Найдите все варианты.

Решение. Если обозначить числа Льва через a и b, то получим: $a+b+ab=1000$. Прибавим к обеим частям единицу: $1+a+b+ab=1001$, или $(1+a)(1+b)=7\cdot 11\cdot 13$. Поскольку a и b натуральны, то $1+a>1$ и $1+b>1$. Отсюда следует, что выполняется один из шести вариантов:

а) $1+a=7$, $1+b=11\cdot 13$, откуда $a=6$, $b=142$;
б) $1+a=11$, $1+b=7\cdot 13$, откуда $a=10$, $b=90$;
в) $1+a=13$, $1+b=7\cdot 11$, откуда $a=12$, $b=76$;
и ещё три варианта, которые получаются при замене a и b.

Ответ: 6 и 142, 10 и 90, 12 и 76.

Критерии.

Продвижения. Найден один или два примера — 1 балл; найдены все три примера — 2 балла.