Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Решения и критерии проверки

Ниже приведены решения задач и критерии проверки. В тексте встречаются ссылки на задачи из вариантов других классов; так, «задача 5.6» означает задачу №6 для 5-го класса.

Сроки проверки. «Первичная» проверка должна быть в основном закончена к 10 февраля. После этого ответственные за параллель могут перепроверять работы с высокими баллами и те, которые вызвали затруднения у проверяющих.

Оценивание работ. Максимальный балл за каждую задачу — 7 баллов. Допускаются только целые баллы.

Рекомендуется придерживаться следующего принципа. Если задача в целом решена верно, но в решении есть мелкие ошибки или пробелы в объяснениях, то ставится 5-6 баллов. Если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (не просто «что-то разумное написано», а именно существенные продвижения), то ставится 1-2 балла. Если продвижения *очень* существенны (человек понял практически всё, что нужно для решения задачи, но задачу по непонятной причине не решил), то можно поставить 3 балла. В целом оценки в 3 и особенно 4 балла рекомендуется ставить как можно реже.

Частные критерии описаны после решения каждой задачи. Они устроены примерно так:

Полное решение – описание того, что должно быть в семибалльном решении (а что не обязательно должно быть: например, от младших мы не всегда требуем чётких доказательств, а от старших – доказательства очевидных фактов).

Погрешности – недостатки решения, приводящие к снятию 1-2 баллов. Если в решении допущено несколько погрешностей, то происходит «частичное суммирование»: за две погрешности по 1 баллу вычитается 2 балла, но за несколько двухбалльных погрешностей всё равно в сумме снимается два балла, в крайнем случае – три. В общем, правило о том, что «задача в целом решена – ставь хотя бы 5, в крайнем случае 4», должно соблюдаться.

Продвижения – указано, за какие продвижения даются баллы, если задача в целом не решена. Здесь действует аналогичное правило «частичного суммирования» с потолком в 2, изредка 3 балла.

К «продвижениям» обычно относится наличие верного числового ответа при отсутствии решения (за ответ ставится 1 балл); однако если видно, что ответ получился верным совершенно случайно из абсолютно неверных соображений, то можно ставить 0. Верно угаданный ответ вида «да/нет» баллов не приносит.

Типичная «погрешность» - арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения. За неё снимается 1-2 балла (в зависимости от сложности задачи – чем проще задача, тем дороже стоит в ней дурацкая ошибка).

Разумеется, реальность разнообразнее заранее придуманных критериев. Тем не менее, надеемся, что они помогут оценивать работы более единообразно. Обо всех спорных случаях стоит сообщать ответственному за параллель, который выступает гарантом единообразия критериев. Критерии могут уточняться в первые дни (ответственные по параллелям могут уточнять их самостоятельно и сообщать проверяющим).

Заполнение таблицы с результатами. Результаты проверки работ нужно внести в xls-таблицу вместе с данными из анкет. Инструкция по указанию данных приведена ниже (вам может показаться, что она слишком подробная и занудная, но она должна облегчить сведение данных в общую таблицу).

- № - не заполняется.
- Параллель, Проверяющий – ваша фамилия и параллель, которую вы проверяете.
- E-mail организатора – с какого ящика присланы письма на ящик жюри (будьте внимательны: некоторые письма переслали с других ящиков). Организатор – название организатора в произвольной форме (например, город и школа в соответствии с указанными в теме письма).
- Страна – по-русски. Регион – без сокращений и без слова «Республика», например, «Минская область», «Татарстан». Населённый пункт: «Магнитогорск», «пос. Петрово Юрьевского района» (тип населённого пункта пишем для сёл, посёлков и т.д., но не для городов; если не райцентр, указываем район).
- «Сельская местность» и «Особые права» - пункты, добавленные по требованию СПбГУ для какой-то отчётности (типа «а сколько в вашей олимпиаде участвует инвалидов, сирот и детей из сельской местности?»); если ответ отсутствует или отрицательный, ничего не писать.
- Школа – например, «школа 56», «гимназия 5 с углублённым изучением математики», «лицей «Золотая горка»» и т.д. (без аббревиатур типа «ГБОУ»; вместо «СОШ» и «ООШ» пишем «школа»; символ № не используем; «имени Пушкина» или «при ДВГУ» оставляем).
- Класс – название класса с буквой.
- Кружок – занимается ли в кружке и где (ФИО руководителя, если это кружок при школе, можно не писать).
- E-mail – для участников с совсем слабыми работами можно не указывать. Если отсутствует e-mail, можно указать вместо него телефон.
- Фамилия, имя – ясно (отчество не нужно).
- 1–6 – баллы по задачам, итого – сумма.
- Примечание – в частности, нужно отмечать подозрения на списывание. Примечания по задачам (пр.1 – пр.6) – если не уверены в оценке или в этой задаче есть что-то интересное.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

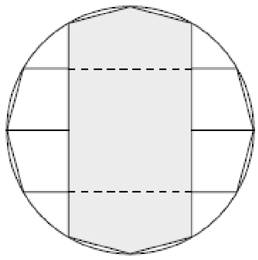
Решение и критерии. См. задачу 9.1.

2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.

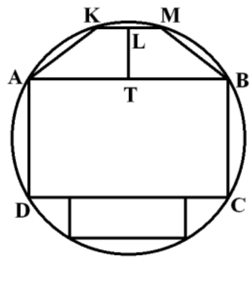
Решение и критерии. См. задачу 10.2.

3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать пять частей, из которых можно составить прямоугольник 1×2,7. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение.



Способ 1. Можно вырезать из круга шестиугольник и три трапеции и расположить их как показано на рисунке. Получается прямоугольник со сторонами 1 и $2+2\cdot(\sqrt{3}/2-1/2)=1+\sqrt{3}>2{,}7$.



Способ 2. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем две прямоугольных трапеции ATLK и BTLM так, чтобы сумма оснований каждой трапеции равнялась 1, а также ещё две симметричные трапеции. Поскольку большие основания равны $\sqrt{3}/2$, то меньшие должны быть $1-\sqrt{3}/2>0{,}15$. Ордината вершины M равна $\sqrt{(1-LM^2)}<\sqrt{(1-0{,}15)^2}=\sqrt{0{,}9775}>0{,}985$. Поэтому высота каждой трапеции больше 0,485. Из двух таких трапеций можно составить прямоугольник со сторонами 1 и >0,485.
Из полученных частей легко составить прямоугольник с шириной 1 и длиной $>\sqrt{3}+2\cdot 0{,}485>2{,}7$.

Критерии. Как в 10.3.
Примечание. Здесь тоже было бы интересно собрать коллекцию (см. 10.3).

4. Существует ли треугольная пирамида, у которой высота равна 60, высота каждой боковой грани, проведённая к стороне основания, равна 61, а периметр основания равен 62?

Решение. Поскольку высоты боковых граней одинаковы, то расстояния от проекции вершины до сторон также одинаковы и равны 11, т.е. радиус вписанной в основание окружности равен 11.

По известной формуле, площадь треугольника равна $62\cdot 11/2=341$. В то же время площадь вписанного круга $\pi r^2=121\pi>341$, что **невозможно**.

Критерии. По общим правилам.

5. Пусть a и n — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное k такое, что a не может быть k-значным числом.

Решение и критерии. См. задачу 9.5.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел a и b значение выражения $a\#b=(a+b)/(1-ab)$, если оно определено. Как и в обычной арифметике, умножение на натуральное число Павел понимает как сложение соответствующего числа одинаковых слагаемых: $a@b=((a\#a)\#a)...\#a$ (здесь b «слагаемых»). Существуют ли в арифметике Павла такие неравные натуральные числа x и y, для которых равны «произведения» $x@y$ и $y@x$?

Решение. В алгебре Павла:
$x\ @\ y=x\ \#\ x\ \#\ ...\ \#\ x$ (y раз),
$y\ @\ x=y\ \#\ y\ \#\ ...\ \#\ y$ (x раз).

Так как (A+B)/(1-AB)=tg(arctg(A)+arctg(B)), то A # B=tg(arctg(A)+arctg(B)).

Следовательно,
$x\ @\ y=$ tg(y·arctg(x)),
$y\ @\ x=$ tg(x·arctg(y)).

Если $x\ @\ y=y\ @\ x$, то x·arctg(y)= y·arctg(x), т.е. arctg(x)/x= arctg(y)/y.

Рассмотрим функцию $F(z)=\mathrm{arctg}(z)/z$ (при $z>0$), её производная
$F'(z)=(z/(1+z^2)-\mathrm{arctg}(z))/z^2$.

Так как $\mathrm{arctg}(z)>z/(1+z^2)$, то $F'(z)<0$.

Следовательно, F(z) монотонно убывает, то есть принимает различные значения при различных аргументах. Поэтому равенство F(x)=F(y) невозможно, то есть невозможно равенство arctg(x)/x= arctg(y)/y .

Итак, $x\ @\ y$ не может оказаться равным $y\ @\ x$. Значит, ответ на поставленный в задаче вопрос - **отрицательный.**

Критерии. По общим правилам. Задача сложная, поэтому стоит ставить баллы за любые сколько-нибудь разумные идеи (в частности, не менее 1 балла за любое упоминание тангенсов).

В заключительном туре олимпиады «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/14 учебного года участникам было предложено 6 задач, решение каждой из которых оценивалась из 7 баллов согласно установленным критериям. Дипломы 1-й, 2-й и 3-й степени присуждались школьникам, которые набрали число баллов не ниже порогового, согласно следующей таблице.

	Диплом 1-й степени	Диплом 2-й степени	Диплом 3-й степени
5 класс	34	27	23
6 класс	37	27	21
7 класс	33	27	19
8 класс	36	26	19
9 класс	35	28	17
10 класс	35	24	17
11 класс	28	23	17