Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Решения и критерии проверки

Ниже приведены решения задач и критерии проверки. В тексте встречаются ссылки на задачи из вариантов других классов; так, «задача 5.6» означает задачу №6 для 5-го класса.

Сроки проверки. «Первичная» проверка должна быть в основном закончена к 10 февраля. После этого ответственные за параллель могут перепроверять работы с высокими баллами и те, которые вызвали затруднения у проверяющих.

Оценивание работ. Максимальный балл за каждую задачу — 7 баллов. Допускаются только целые баллы.

Рекомендуется придерживаться следующего принципа. Если задача в целом решена верно, но в решении есть мелкие ошибки или пробелы в объяснениях, то ставится 5-6 баллов. Если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (не просто «что-то разумное написано», а именно существенные продвижения), то ставится 1-2 балла. Если продвижения *очень* существенны (человек понял практически всё, что нужно для решения задачи, но задачу по непонятной причине не решил), то можно поставить 3 балла. В целом оценки в 3 и особенно 4 балла рекомендуется ставить как можно реже.

Частные критерии описаны после решения каждой задачи. Они устроены примерно так:

Полное решение – описание того, что должно быть в семибалльном решении (а что не обязательно должно быть: например, от младших мы не всегда требуем чётких доказательств, а от старших – доказательства очевидных фактов).

Погрешности – недостатки решения, приводящие к снятию 1-2 баллов. Если в решении допущено несколько погрешностей, то происходит «частичное суммирование»: за две погрешности по 1 баллу вычитается 2 балла, но за несколько двухбалльных погрешностей всё равно в сумме снимается два балла, в крайнем случае – три. В общем, правило о том, что «задача в целом решена – ставь хотя бы 5, в крайнем случае 4», должно соблюдаться.

Продвижения – указано, за какие продвижения даются баллы, если задача в целом не решена. Здесь действует аналогичное правило «частичного суммирования» с потолком в 2, изредка 3 балла.

К «продвижениям» обычно относится наличие верного числового ответа при отсутствии решения (за ответ ставится 1 балл); однако если видно, что ответ получился верным совершенно случайно из абсолютно неверных соображений, то можно ставить 0. Верно угаданный ответ вида «да/нет» баллов не приносит.

Типичная «погрешность» - арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения. За неё снимается 1-2 балла (в зависимости от сложности задачи – чем проще задача, тем дороже стоит в ней дурацкая ошибка).

Разумеется, реальность разнообразнее заранее придуманных критериев. Тем не менее, надеемся, что они помогут оценивать работы более единообразно. Обо всех спорных случаях стоит сообщать ответственному за параллель, который выступает гарантом единообразия критериев. Критерии могут уточняться в первые дни (ответственные по параллелям могут уточнять их самостоятельно и сообщать проверяющим).

Заполнение таблицы с результатами. Результаты проверки работ нужно внести в xls-таблицу вместе с данными из анкет. Инструкция по указанию данных приведена ниже (вам может показаться, что она слишком подробная и занудная, но она должна облегчить сведение данных в общую таблицу).

- № - не заполняется.
- Параллель, Проверяющий – ваша фамилия и параллель, которую вы проверяете.
- E-mail организатора – с какого ящика присланы письма на ящик жюри (будьте внимательны: некоторые письма переслали с других ящиков). Организатор – название организатора в произвольной форме (например, город и школа в соответствии с указанными в теме письма).
- Страна – по-русски. Регион – без сокращений и без слова «Республика», например, «Минская область», «Татарстан». Населённый пункт: «Магнитогорск», «пос. Петрово Юрьевского района» (тип населённого пункта пишем для сёл, посёлков и т.д., но не для городов; если не райцентр, указываем район).
- «Сельская местность» и «Особые права» - пункты, добавленные по требованию СПбГУ для какой-то отчётности (типа «а сколько в вашей олимпиаде участвует инвалидов, сирот и детей из сельской местности?»); если ответ отсутствует или отрицательный, ничего не писать.
- Школа – например, «школа 56», «гимназия 5 с углублённым изучением математики», «лицей «Золотая горка»» и т.д. (без аббревиатур типа «ГБОУ»; вместо «СОШ» и «ООШ» пишем «школа»; символ № не используем; «имени Пушкина» или «при ДВГУ» оставляем).
- Класс – название класса с буквой.
- Кружок – занимается ли в кружке и где (ФИО руководителя, если это кружок при школе, можно не писать).
- E-mail – для участников с совсем слабыми работами можно не указывать. Если отсутствует e-mail, можно указать вместо него телефон.
- Фамилия, имя – ясно (отчество не нужно).
- 1–6 – баллы по задачам, итого – сумма.
- Примечание – в частности, нужно отмечать подозрения на списывание. Примечания по задачам (пр.1 – пр.6) – если не уверены в оценке или в этой задаче есть что-то интересное.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2013/2014 учебный год. Второй тур

Задачи для 10 класса

1. В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Для каждой пары диагоналей, пересекающихся внутри пятиугольника, нашли меньший из углов между ними. Какие значения может принимать сумма этих пяти углов?

Решение и критерии. См. задачу 9.1.

2. Пусть $f(x) = x^3+9x^2+27x+24$. Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$.

Решение. Заметим, что $f(x) = (x+3)^3-3$.

Поэтому $f(f(x)) = f((x+3)^3-3) = ([(x+3)^3-3]+3)^3-3=(x+3)^9-3$;
аналогично получаем, что $f(f(f(x))) = (x+3)^{27}-3$ и $f(f(f(f(x)))) = (x+3)^{81}-3$.

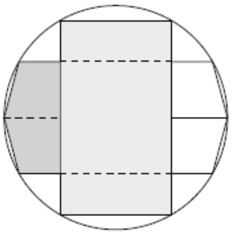
Итак, нужно решить уравнение $(x+3)^{81}-3 = 0$; его корень равен $-3 + \sqrt[81]{3}$.

Критерии. По общим правилам.

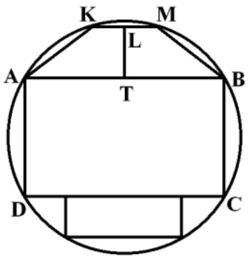
3. Докажите, что из круга радиуса 1 можно вырезать четыре части, из которых можно составить прямоугольник $1\times 2{,}5$. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение.

Способ 1. Можно вырезать из круга прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$, а также три трапеции (см. рисунок). Из этих деталей получается прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}+1/2+(\sqrt{3}/2-1/2)=(3\sqrt{3})/2>2{,}5$.



Способ 2. Для начала расположим в круге прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$. Его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$. Далее нарисуем прямоугольник с вершинами $(\pm 1/2, -1/2)$ и $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$, его стороны равны 1 и $\sqrt{3}/2-1/2$. Наконец, нарисуем две прямоугольных трапеции ATLK и BTLM так, чтобы сумма оснований каждой трапеции равнялась 1. Поскольку нижние основания равны $\sqrt{3}/2$, то верхние должны быть $1-\sqrt{3}/2>0{,}15$. Ордината вершины M равна $\sqrt{(1-LM^2)}<\sqrt{(1-0{,}15)^2}=\sqrt{0{,}9775}>0{,}985$. Поэтому высота каждой трапеции больше 0,485. Из двух таких трапеций можно составить прямоугольник со сторонами 1 и >0,485. Из полученных частей легко составить прямоугольник с шириной 1 и длиной $>\sqrt{3}+(\sqrt{3}/2-1/2)+0{,}485>2{,}5$.



Критерии.

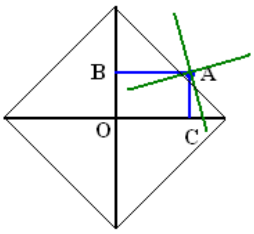
Погрешности. Если приведена верная чётко описанная картинка, но отсутствуют вычисления, подтверждающие, что прямоугольник достаточно длинный – 5 баллов. Если картинка ещё недостаточно чётко описана (так что не вполне понятно, как разрезается), то оценка может быть снижена до 4 баллов.

Продвижения. Если получился прямоугольник, который короче 2,5, то можно тоже давать за него баллы: 1 балл за прямоугольник длиной $2\sqrt{3}$ - 1 (см. задачу 9.4) и 2 балла за более длинный прямоугольник.

Примечание. Вероятно, существуют другие интересные способы. Просим проверяющих сообщать о них (для коллекции), особенно если какой-то из способов даёт более длинный прямоугольник.

4. Внутри квадрата со стороной 100 нарисовали 100 000 квадратов. Диагонали разных квадратов не имеют общих точек. Докажите, что сторона хотя бы одного квадрата меньше 1.

Решение. Пусть сторона каждого квадрата не меньше 1. Для начала докажем, что расстояние между центрами квадратов не меньше 0,49. Действительно, пусть O и A – центры квадратов и OA<0,49, тогда AC<0,49 (см. рисунок). Хотя бы одна из прямых, содержащих диагонали квадрата с центром A, пересекает прямую OC в точке, удалённой от A не более чем на $0{,}49\sqrt{2}$. Но тогда сторона этого квадрата не превышает 0,98.



Теперь используем принцип Дирихле. Разобьём исходный квадрат на 90000 квадратиков со стороной 1/3. В одном из этих квадратиков окажется хотя бы два центра, но расстояние между ними не может превышать $\sqrt{2}/3<0{,}49$.

Критерии.
Полное решение состоит из двух частей: доказательство того, что центры не могут быть слишком близки, и использование принципа Дирихле. Если хотя бы одна из частей отсутствует или не доказана, то задача не решена.

Погрешности. Ошибка в оценки при верном ходе решения – минус 1-2 балла.

Продвижения. Доказано, что расстояние между центрами не меньше какого-нибудь числа – не менее 2 баллов (а можно и три). Попытки разбить квадрат на много квадратиков (а ля принцип Дирихле) и что-нибудь сделать с каждым квадратиком – не менее 1 балла.

Рассмотрены только некоторые способы расположения центров (в качестве примеров) – 0 баллов.

5. Пусть *a* и *n* — натуральные числа, причём известно, что a^n — 2014-значное число. Найдите наименьшее натуральное *k* такое, что *a* не может быть *k*-значным числом.

Решение и критерии. См. задачу 9.5.

6. Павел придумал новый способ сложения чисел: он называет «павлосуммой» чисел *x* и *y* значение выражения $x\#y=(x+y)/(1-xy)$, если оно определено. Однажды он «сложил» своим способом числа *a* и *b*, «прибавил» к ним *c*, а к результату — *d*. В то же время его друг «сложил» числа *c* и *d*, «прибавил» к ним *b*, а к результату — *a*. Могли ли у них получиться разные результаты?

Решение. Нужно проверить, что $((a\#b)\#c)\#d=a\#(b\#(c\#d))$. Это можно доказать прямым вычислением, а можно заметить, что если *x* и *y* — тангенсы углов A и B, то $x\#y$ — тангенс угла A+B, и поэтому требуемое свойство следует из того, что tg(((A+B)+C)+D)= tg(A+(B+(C+D))).

Замечание. При этом возможно, что одно из значений определено, а второе не определено, например, при a=b=2, c=d=1.

Критерии. См. задачу 9.6.