XXVI Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2018»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1** .Известно, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$ и для любых действительных x удовлетворяет уравнению $20f(18x)=f(x)+x^2$. Сколько существует целых x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x)<\frac{x}{2018}?$$

Решение:
$x=0$
$20f(0)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$
$f(x)$— непрерывна в точке $x=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$
$f(x)=\frac{1}{20}f\left(\frac{x}{18}\right)+\frac{1}{20}\frac{x^2}{18^2}$
$f\left(\frac{x}{18}\right)=\frac{1}{20}f\left(\frac{x}{18^2}\right)+\frac{1}{20}\frac{x^2}{18^4}$
$f\left(\frac{x}{18^2}\right)=\frac{1}{20}f\left(\frac{x}{18^3}\right)+\frac{1}{20}\frac{x^2}{(18^2)^3}$
...
$f\left(\frac{x}{18^{n-1}}\right)=\frac{1}{20^n}f\left(\frac{x}{18^n}\right)+\frac{1}{20}\frac{x^2}{(18^2)^n}$
$f\left(x\right)=\frac{1}{20^n}f\left(\frac{x}{18^n}\right)+\frac{1}{20}\frac{x^2}{(18^2)^n}$
$A_n=\frac{1}{20}\frac{1}{(18)^2}+\frac{1}{20^2}\frac{1}{(18^2)^2}+\frac{1}{20^3}\frac{1}{(18^2)^3}+\dots+\frac{1}{20^n}\frac{1}{(18^2)^n}$
$f(x)=f_n(x)+x^2A_n$, $\lim_{n\to\inf}f_n(x)=\lim_{n\to\inf}\frac{1}{20^n}f\left(\frac{x}{18^n}\right)=0$
$\lim_{n\to\inf}A_n==\dfrac{\frac{1}{20\cdot 18^2}}{1-\frac{1}{20\cdot 18^2}}=\frac{1}{6479}$
$f(x)=\frac{1}{6479}x^2$
$\frac{1}{6479}x\left(x-\frac{6479}{2018}\right)<0$
Решения неравенства: 1, 2, 3.
Ответ: 3

▷ **2** .Три равных шара радиусом 1 лежат на одной плоскости и попарно касаются друг друга. Конус с углом 60° в вершине осевого сечения стоит основанием на той же плоскости и касается боковой поверхности каждого шара. Найти радиус основания конуса.

Решение: Обозначим через O_1, O_2, O_3 — центры данных шаров, x — радиус основания конуса. Очевидно, $O_1O_2O_3$ — правильный треугольник со стороной, равной двум радиусам шара, т.е. равной 2. Высота конуса пересекает плоскость треугольника $O_1O_2O_3$ в его центре O, поэтому OO_1 — радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, т.е. $|OO_1|=\frac{2}{\sqrt3}$.

Рассмотрим два возможных случая:
1) шары находятся внутри конуса;
2) шары находятся вне конуса.

1) Пусть шары расположены внутри конуса. Рассмотрим осевое сечение ABC конуса, проходящее через один из центров данных шаров, например O_1. Пусть BK — высота конуса. Как было показано выше, точка O_1 удалена от BK на расстояние $|OO_1|=\frac{2}{\sqrt3}$. Поскольку шар с центром O_1 касается образующей конуса в точке L и основания конуса в точке M (т.е. $O_1L=O_1M=1$), то точка O_1 лежит на биссектрисе угла ACB, откуда

$$\angle MCO_1=\frac12\angle ACB=\frac12(90^\circ-30^\circ)=30^\circ.$$

Поэтому

$$|KC|=|KM|+|MC|=|OO_1|+|O_1M|\cdot\mathrm{ctg}\,30^\circ=\frac{2}{\sqrt3}+1\cdot\sqrt3=\frac{5}{\sqrt3}.$$

2) Пусть теперь шары расположены вне конуса. В этом случае точка O_1 будет принадлежать биссектрисе угла BCM (ABC — осевое сечение конуса, проходящее через O_1), поскольку O_1 равноудалена от образующей конуса BC и от продолжения AM основания конуса.

Итак,

$$x=|KC|=|KM|-|CM|=|OO_1|-|O_1M|\cdot\mathrm{ctg}\,\angle O_1CM=$$

$$=\frac{2}{\sqrt3}-1\cdot\mathrm{ctg}\,60^\circ=\frac{2}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}.$$

Ответ: $\frac{5}{\sqrt3}$; $\frac{1}{\sqrt3}$

▷ **3** .Сколько целых решений имеет неравенство

$$x^6-17x^4-12x^3+33x^2+4x-1\le 0?$$

Решение: Так как множители свободного члена 1 и -1 не являются корнями соответствующего уравнения, то выделить множитель первой степени с рациональными коэффициентами мы не сможем. Попробуем выделить множитель второй степени методом неопределенных коэффициентов. Положим

$$x^6-17x^4-12x^3+33x^2+4x-1=$$

$$= (x^2 + ax - 1)(x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1).$$

(Попытка взять свободный член с плюсом в первом множителе не привела бы к результатам). Перемножив многочлены в первой части, получим:

$$x^6 + (a+b)x^5 + (ab + c - 1)x^4 +$$

$$+(ac + d - b)x^3 + (ad - c + 1)x^2 + (a - d)x - 1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0; \\ ab + c - 1 = -17; \\ ac + d - b = -12; \\ ad - c + 1 = 33; \\ a - d = 4. \end{cases}$$

Получаем $a = -b$. Подставляем в остальные уравнения:

$$\begin{cases} -b^2 + c = -16; \\ -bc + d - b = -12; \\ -bd - c = 32; \\ -b - d = 4. \end{cases}$$

Сложим первое и третье уравнения: $-b^2 - bd = 16$ или $-b(b+d) = 16$. С учетом того, что $-b - d = 4$, находим $b = 4$, $c = b^2 - 16 = 0$, $d = -b - 4 = -8$.

Итак, имеем два уравнения: $x^2 - 4x - 1 = 0$ и $x^4 + 4x^3 - 8x + 1 = 0$. Первое из них сразу дает

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Для решения второго преобразуем его в биквадратное с помощью подстановки $x = y - 1$. Получим:

$$y^4 - 6y^2 + 6 = 0.$$

Отсюда найдем

$$y = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{3}}.$$

$$x_{3,4,5,6} = -1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{3}}$$

Найдем целые решения неравенства. Оценим корни:

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$x_1 \in (4,4; 4,5) \qquad x_2 \in (-0,5; -0,4).$$

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

$$4,7 < 3 + \sqrt{3} < 4,8$$

$$2,1 < \sqrt{3 + \sqrt{3}} < 2,2$$

$$x_3 \in (1,1; 1,2) \qquad x_4 \in (-3,2; -3,1).$$

$$-1,8 < -\sqrt{3} < -1,7$$

$$1,2 < 3 - \sqrt{3} < 1,3$$

$$1,1 < \sqrt{3 - \sqrt{3}} < 1,2$$

$$x_5 \in (0,1; 0,2) \qquad x_6 \in (-2,2; -2,1).$$

Получаем

$$x_4 < x_6 < x_2 < x_5 < x_3 < x_1.$$

Нанеся корни уравнения на координатную ось и определив промежутки знакопостоянства, получим решение неравенства в виде:

$$x \in [x_4; x_6] \cup [x_2; x_5] \cup [x_3; x_1].$$

Выпишем целые числа, попадающие в эти промежутки: -3, 0, 2, 3, 4.

Ответ: 5

$\triangleright$ **4 .**Робот из клеточного поля 11×11 случайным образом выбивает одну клетку, не имеющую общих точек с границей этого поля. Какова вероятность того, что существует возможность разрезать оставшуюся часть доски на прямоугольники размером 1×3 клетки?

Ответ: $\frac{1}{9}$

$\triangleright$ **5 .**При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких, что

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha = 0?$$

Ответ: 4036, 4037

$\triangleright$ **6 .**В семизначном числе, имеющем 108 делителей, первая цифра (слева) 1, вторая 0. Это же число, уменьшенное в 12 раз, имеет 70 делителей, а увеличенное в 18 раз — 160 делителей. Найти это число.

Решение: Обозначив искомое число через N, будем иметь по условию:

$$1000000 < N < 1100000.$$

Причем:

N имеет 108 делителей.

$\frac{N}{12} = \frac{N}{2^2 \cdot 3}$ имеет 70 делителей.

$18N = 2 \cdot 3^2 N$ имеет 160 делителей.

Пусть

$$N = 2^a 3^b M,$$

где M включает все остальные множители. Обозначив число делителей M через p, будем иметь

$$\begin{aligned} &(a+1)(b+1)p = 108; \\ &(a-1)bp = 70; \\ &(a+2)(b+3)p = 160. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\frac{(a+1)(b+1)}{(a-1)b} = \frac{54}{35};$$
$$\frac{(a+2)(b+3)}{(a-1)b} = \frac{16}{7}.$$

Решаем эту систему обычным способом. После упрощений получим:

$$19ab = 35a + 89b + 35;$$
$$9ab = 21a + 30b + 42.$$

Умножим первое уравнение системы на 9, второе на 19 и, вычтя первое из второго, после сокращения найдем:

$$4a - 11b + 23 = 0.$$

Отсюда:

$$a = \frac{11b - 23}{4}.$$

Подставив во второе уравнение системы, получим квадратное уравнение:

$$11b^2 - 62b + 35 = 0,$$

решив которое, найдем $b_1 = 5$, $b_2 = \frac{7}{11}$. Очевидно, второй корень не годится. Итак, $b = 5$. Тогда $a = 8$. Подставив в одно из исходных уравнений, найдем $p = 2$.

Следовательно, число M имеет всего два делителя. Это значит, что оно является простым числом.

Итак, имеем

$$N = 2^8 \cdot 3^5 \cdot M = 62208M.$$

Подставим в исходное неравенство:

$$1000000 < 62208M < 1100000.$$

Отсюда

$$16 < M < 17,7.$$

Следовательно, $M = 17$. Тогда $N = 62208 \cdot 17 = 1057536$.

Ответ: 1057536

▷ **7 .**Найти такое натуральное число n, чтобы сумма

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

являлась квадратом некоторого натурального числа.

Решение: Так как

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

то задача будет решена, если мы найдем такие натуральные a и b, для которых

$$n(n+1) = 2a^2b^2.$$

$n \neq 2$, т.к. равенство $3 = a^2b^2$ не может быть выполнено ни при каких натуральных a и b. Так как n и $n+1$ — взаимно простые числа, то можем положить:

$$n = 2a^2 \quad n+1 = b^2; \qquad n = a^2 \quad n+1 = 2b^2.$$

В первом случае получаем уравнение:

$$b^2 - 2a^2 = 1,$$

а во втором:

$$a^2 - 2b^2 = -1.$$

Решение обоих уравнений можно найти разложением числа $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь.

Можно поступить и так: первое уравнение имеет очевидное решение $a = 2$, $b = 3$ (в этом случае $n = 8$). Имеем:

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат, будем иметь:

$$(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 1.$$

Следовательно, числа 17 и 12 также являются решениями первого уравнения. Отсюда $n = 288$. Возведем обе части равенства в куб:

$$(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2}) = 1.$$

Следовательно, числа 70 и 99 также являются решениями первого уравнения. Отсюда $n = 9800$. Далее возводим в четвертую, пятую и т.д. степень.

Поступаем аналогично для второго уравнения. Здесь возьмем решение $a = 1$, $b = 2$ (в этом случае $n = 1$) и будем возводить в степень с нечетным показателем обе части равенства:

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1.$$

Например, третья степень даст $a = 7$, $b = 5$, $n = 49$, и т.д.

Ответ: 8, 49, 288, 1681

▷ **8 .**Определить в целых числах стороны тупоугольного треугольника, периметр и площадь которого выражаются одним и тем же целым числом.

Решение: По условию имеем:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p,$$

или,введя обозначение

$$p - a = x; \quad p - b = y; \quad p - c = z;$$

получим:

$$xyz = 4(x + y + z).$$

Исследуем это уравнение. Прежде всего установим, что x, y и z не могут быть равны между собой, так как в этом случае имеем

$$x^3 = 12x$$

и x не может быть рациональным числом.

Положим теперь, что равны между собою какие-либо два из неизвестных x, y, z. Допустим, $x = y$. Тогда имеем

$$x^2 z = 4(2x + z).$$

Откуда:

$$z = \frac{8x}{x^2 - 4}.$$

При этом, так как z — число целое, должно быть

$$x^2 - 4 < 8x.$$

Решив это неравенство, найдем

$$x < 9.$$

Но при $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ не получается целых значений a, b, c.

Таким образом, треугольник может быть только разносторонним. Не нарушая общности, мы можем положить

$$x > y > z.$$

Заметим еще, что z не может быть больше 2. Действительно, если $z = 3$, то $y \geq 4$, $x \geq 5$, и подстановка дает

$$5 \cdot 4 \cdot 3 > 4(5 + 4 + 3),$$

и при бо́льших значениях z неравенство будет только усиливаться.

Отсюда следует, что испытанию подлежат лишь два значения $z = 1$ и $z = 2$.

Пусть $z = 1$. Тогда т.к.

$$x = \frac{4(y+z)}{yz - 4} = \frac{4(y+1)}{y - 4} = 4 + \frac{20}{y - 4}.$$

Целые значения для x получаются в случаях:

$$y = 5; \quad x = 24$$
$$y = 6; \quad x = 14$$
$$y = 8; \quad x = 9.$$

При бо́льших значениях y будет уже $x < y$, что противоречит предположению.

Вычислив стороны, получаем три треугольника, удовлетворяющих условию задачи: $(6; 25; 29)$, $(7; 15; 20)$, $(9; 10; 17)$. Проверка показывает, что все они тупоугольные (Например, у первого треугольника косинус угла, лежащего против большей стороны, отрицательный: по теореме косинусов $cos\varphi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{6^2+25^2-29^2}{2\cdot 6\cdot 25} < 0$).

Пусть $z = 2$. Тогда т.к.

$$x = \frac{4(y+z)}{yz - 4} = \frac{4(y+2)}{2y - 4} = 2 + \frac{8}{y - 2}.$$

Целые значения для x получаются в случаях:

$$y = 3; \quad x = 10$$
$$y = 4; \quad x = 6$$

При бо́льших значениях y получаем $x < y$, что противоречит предположению.

Получаем еще два треугольника $(5; 12; 13)$, $(6; 8; 10)$. Но эти треугольники являются прямоугольными.

Ответ: $(6; 25; 29)$, $(7; 15; 20)$, $(9; 10; 17)$

$\triangleright$ **9 .**Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{\cos^3 18^\circ}{\cos x} + \frac{\sin^3 18^\circ}{\sin x} = 1$$

в промежутке $[0^\circ, 2018^\circ]$?

Решение: Освободим уравнение от знаменателей, одновременно приведя его к однородному путем замены 1 выражением $\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ$. Будем иметь:

$$\cos^3 18^\circ \sin x + \sin^3 18^\circ \cos x - \sin^2 18^\circ \sin x \cos x - \cos^2 18^\circ \sin x \cos x = 0.$$

Чтобы можно было применить хотя бы к первым членам этого равенства формулу синуса суммы, нужно, чтобы $\sin 18^\circ$ и $\cos 18^\circ$ входили в первых степенях. Для этого заменим $\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ$ и $\sin^2 18^\circ = 1 - \cos^2 18^\circ$. Получим:

$$\cos 18^\circ \sin x - \cos 18^\circ \sin^2 18^\circ \sin x + \sin 18^\circ \cos x -$$

$$- \sin 18^\circ \cos^2 18^\circ \cos x - \sin^2 18^\circ \sin x \cos x - \cos^2 18^\circ \sin x \cos x.$$

Как видим, первый и третий члены дают $\sin(x + 18^\circ)$, а второй и четвертый: $-\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos(x - 18^\circ)$. Итак, имеем

$$\sin(x+18^\circ) - \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos(x-18^\circ) - \sin^2 18^\circ \sin x \cos x - \cos^2 18^\circ \sin x \cos x = 0.$$

Для преобразования последних двух членов прибавим к ним равное нулю выражение $\sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - \sin^2 x - \cos^2 x)$, раскрыв в нем предварительно скобки. Получим:

$$- \sin^2 18^\circ \sin x \cos x - \cos^2 18^\circ \sin x \cos x +$$

$$+ \sin 18^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 18^\circ \sin^2 x - \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos^2 x =$$

$$= \sin 18^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \sin x (\sin 18^\circ \cos x + \cos 18^\circ \sin x) -$$

$$- \cos 18^\circ \cos x (\sin 18^\circ \cos x + \cos 18^\circ \sin x) =$$

$$= \sin 18^\circ \cos 18^\circ - (\sin 18^\circ \sin x + \cos 18^\circ \cos x) \sin(x + 18^\circ) =$$

$$= \sin 18^\circ \cos 18^\circ - \cos(x - 18^\circ) \sin(x + 18^\circ).$$

Возвращаемся к уравнению:

$$\sin(x+18^\circ)+\sin 18^\circ \cos 18^\circ - \cos(x-18^\circ)\sin(x+18^\circ) - \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos(x-18^\circ) =$$

$$= \sin(x + 18^\circ) + \sin 18^\circ \cos 18^\circ - \cos(x - 18^\circ)[\sin(x + 18^\circ) + \sin 18^\circ \cos 18^\circ] = 0.$$

И, наконец, окончательно

$$[1 - \cos(x - 18^\circ)][\sin(x + 18^\circ) + \sin 18^\circ \cos 18^\circ] = 0.$$

Теперь уже уравнение решается легко. Первый множитель дает:

$$\cos(x - 18^\circ) = 1; \qquad x - 18^\circ = 2k\pi; \qquad x = 2k\pi + 18^\circ.$$

Из второго находим:

$$\sin(x + 18^\circ) = -\sin 18^\circ \cos 18^\circ = -\frac{1}{2}\sin 36^\circ.$$

Отсюда

$$x + 18^\circ = k\pi - (-1)^k \arcsin(\frac{1}{2}\sin 36^\circ), \quad x = k\pi - (-1)^k \arcsin(\frac{1}{2}\sin 36^\circ) - 18^\circ.$$

Ответ: 17

▷ **10 .**В боковых гранях некоторой треугольной пирамиды с вершиной в точке S проведены биссектрисы SM, SN, SK, длины которых l_1, l_2, l_3. Найдите объем пирамиды $SMNK$, если известно, что один из ее плоских углов при вершине S не тупой, а другой не острый. **Решение:** $|\overline{x}| = |\overline{y}| = |\overline{z}| = 1$

$(|\overline{x}| + |\overline{y}|)\,(|\overline{x}| + |\overline{z}|) = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$

$(|\overline{x}| + |\overline{y}|)\,(|\overline{y}| + |\overline{z}|) = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$

$(|\overline{y}| + |\overline{z}|)\,(|\overline{x}| + |\overline{z}|) = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$

$\overline{xy} = \cos\gamma$

$\overline{yz} = \cos\alpha$

$\overline{zx} = \cos\beta$

Один плоский угол при вершине S не тупой, следовательно, все плоские углы при вершине S не тупые, т.е. все плоские углы при вершине S прямые.

Один плоский угол при вершине S не острый, следовательно, все плоские углы при вершине S не острые, т.е. все плоские углы при вершине S прямые.

Т. о. если такая пирамида существует, то

$$V = \frac{1}{6} l_1 l_2 l_3$$

Пример: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 120^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = 330^\circ < 360^\circ$ в трехгранном угле с плоскими углами α, β, γ проводим биссектрисы плоских углов, длиной l_1, l_2, l_3. Через точки проводим плоскость (единственную), которая отсекает требуемую пирамиду.

Ответ: $\frac{1}{6} l_1 l_2 l_3$