

# XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

11 класс



▷ 1. Решите уравнение  $\sin x = 2 \sin 20^\circ \sin(170^\circ - x)$ .

▷ 2. Точка начинает движение из начала координат и движется по графику функции  $y = x^2 + px$  и не меняет направление движения. При каком  $p$  эта точка всегда удаляется от начала координат?

▷ 3. При каком наименьшем  $n$  неравенство

$$x^2 + x \leq \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{22\dots2}_n$$

имеет не менее 2017 решений, кратных 1993?

▷ 4. Если поверхность треугольной пирамиды разрезать вдоль ребер, выходящих из вершины, то ее развертка на плоскости основания является квадратом. Найти отношение поверхностей сфер, вписанной и описанной около этой пирамиды.

▷ 5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{13}^4 = 2017?$$

▷ 6. В трех неодинаковых банках с водой растворили по килограммовой пачке сахара, получив 40%, 60%,  $q\%$  растворы сахара. После этого смешали все три раствора сахара в один объем и получили  $p\%$  раствор сахара. Сколько процентный раствор сахара был в третьей банке, если  $23 \leq p \leq 25$  и  $q$  — целое число?

▷ 7. Найдите наибольшее значение величины  $\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1} + \dots + \sqrt{x_{2017} - 1}$ , если  $x_1, x_2, \dots, x_{2017} \geq 1$  и  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2017} = 4034$ .

▷ 8. Дан квадратный стол размера  $20 \times 20$ , на котором проведена диагональ. В одном из рассматриваемых треугольников дана окружность радиуса 1, центр которой удален от границ этого треугольника не менее чем на 3. В другом треугольнике случайным образом, не видя другой половины квадрата, проводится такая же окружность. Доказать, что вероятность того, что существует квадрат, два противоположных угла которого лежат на окружностях, а два других на общей границе этих треугольников не превосходит 10%.

▷ 9. При каком  $a$  уравнение

$$\max_{x \leq t \leq x+1} (t^3 - 4t) = a$$

имеет ровно два решения или больше трех решений?

▷ 10. Способом разрезания составьте квадрат из:

- а) двух равных квадратов;
- б) трех равных квадратов.