

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

10 класс



▷ 1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 36^\circ}{2 \sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$$

В ответе укажите наименьший положительный угол в градусах.

▷ 2. Какая цифра стоит на четвертом месте с конца в десятичной записи дроби  $\frac{1993}{2017}$ ?

▷ 3. Каждую вершину квадрата соединили с серединами сторон квадрата, не проходящих через эту вершину. Середины смежных сторон соединили попарно. Найти наибольшее значение синуса внутреннего угла в получившейся при пересечении образовавшихся четырех треугольников фигуре.

▷ 4. Найдите наибольшее значение величины  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$ , если  $x, y, z \geq 1$  и  $x + y + z = 6$ .

▷ 5. Пусть  $d(x)$  — расстояние от  $x$  до ближайшего целого числа. При каком  $a$  уравнение:

$$d(x) = \frac{x}{a}$$

имеет ровно 2017 решений?

▷ 6. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна  $h$ . Какой может быть длина средней линии такой трапеции? Какова наименьшая возможная длина средней линии? Когда она получается?

▷ 7. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , удовлетворяющее неравенству:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) \geq 1993 \cdot 2017.$$

▷ 8. Можно ли разрезать квадрат  $10 \times 10$  на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 2017?

▷ 9. Дан отрезок длиной  $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ . С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной  $\sqrt[4]{10}$ .

▷ 10. В одной прямоугольной половине квадрата  $20 \times 20$  проведена единичная окружность, центр которой удален не менее, чем на 3 единицы от ее границы.

Случайным образом на второй половине, не видя первую окружность, рисуется такая же единичная окружность. Какова вероятность того, что существует квадрат, две противоположные вершины которого принадлежат окружностям, а две другие — общей границе этих половин?