XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

8 класс

▷ **1.** Сколько существует натуральных чисел n таких, что число $2018n$ делится на $2017+n$?

Решение $\frac{2018n}{2017+n} = \frac{2018(n+2017)-2017\cdot 2018}{n+2017} = 2018 - \frac{2\cdot 1009\cdot 2017}{n+2017}$

Ответ:

1) $n+2017 = 2018, n = 1$;

2) $n+2017 = 2\times 2017, n = 2017$;

3) $n+2017 = 1009\times 2017, n = 1008\times 2017$;

4) $n+2017 = 2018\times 2017, n = 2017^2$;

▷ **2.** Найдите два наименьших натуральных числа, каждое из которых делится на 5-ую степень некоторого числа, большего 1.

Решение $2^5 = 32, 3^5 = 243$.

$|32a-243b| = 1$, $32a-243b = \pm 1$, $32a = 243b\pm 1$, следовательно b — нечетно:

$b = 1$, $32a = 242$ или 244 — невозможно.

$b = 3$, $32a = 729\pm 1$ — невозможно.

$b = 5$, $32a = 1214$ или 1216.

$1216 = 32\times 38$, т.е. $a = 38$.

$b = 5+325$, $a = 38+243t$

При $b = 5+32 = 37$, $a = 281$.

Пусть $N = 1215 \vdots 3^5 = 243$

$1215 = 243\times 5$

$N+1 = 1216 \vdots 25 = 32$

$1216 = 32\times 38$

Ответ: 1215, 1216

▷ **3.** Пусть $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа. Сколько решений имеет уравнение

$$d(x) = \frac{x}{1000}?$$

Ответ: 1000

▷ **4.** Известно, что у дракона 5 голов и у каждой не более 31 зуба. Верно ли, что среди 32^{31} драконов может не оказаться двух особ с одним и тем же наборов зубов, а среди 16^{39} драконов обязательно найдется хотя бы одна пара с одним и тем же наборов зубов?

Решение Пронумеруем (возможные) зубы головы дракона от 1 до 31, на каждом месте либо есть зуб, либо его нет. Всего получаем 2^{31} различных возможных наборов зубов у головы, и $(2^{31})^5 = 2^{155}$ различных возможных наборов зубов у дракона. Так как $32^{31} = 2^{155}$, то первое утверждение доказано. Далее, так как $16^{39} = 2^{39\cdot 4} = 2^{156} > 2^{155}$, то среди 16^{39} драконов обязательно найдется хотя бы одна пара с одним и тем же наборов зубов.

Ответ: оба утверждения верны

▷ **5.** Известно, что числа 40316, 64520 и 98809 при делении на некоторое число дают один и тот же остаток. Найдите этот делитель и остаток.

Решение

$$\begin{cases} 40316 = as+r, \\ 64520 = bs+r, \\ 98809 = cs+r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-a)s = 24204 = 2^2\cdot 3\cdot 2017, \\ (c-b)s = 34289 = 17\cdot 2017, \\ (c-a)s = 58493 = 29\cdot 2017. \end{cases}$$

Получаем, что $c = 2017$.

$40316 = 2017\cdot 19+1993$

$64520 = 2017\cdot 31+1993$

$98809 = 2017\cdot 48+1993$

Ответ: 2017, 1993

▷ **6.** Пусть $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырехзначные числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2}\cdot\overline{a_3a_4}+1677.$$

Решение: Пусть $x = \overline{a_1a_2}$, $y = \overline{a_3a_4}$. x, y — целые двузначные числа. Тогда $100x+y = xy+1677$, $100x-100-xy+y = 1577$, $(x-1)(100-y) = 1577 = 19\cdot 83$. Тогда либо $x-1 = 19$, $100-y = 83$, либо $x-1 = 83$, $100-y = 19$. То есть получаем наборы 20 и 17, 84 и 81.

Ответ: 2017, 8481

▷ **7.** Найти все точки плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\max\{x, x^2\}+\min\{y, y^2\} = 1.$$

Решение: Рассмотрим $x\in[0,1]$. В этом случае $\max\{x,x^2\} = x$, $\min\{y,y^2\} = y^2$, соотношение имеет вид $x+y^2 = 1$. Далее, для $x\in[-1,0)$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y^2$, соотношение имеет вид $x^2+y^2 = 1$. При $x<-1$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y$, соотношение имеет вид $x^2+y = 1$. При $x>1$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y$, соотношение имеет вид $x^2+y = 1$.

Ответ:

$$\begin{cases} y = 1-x^2, & x<-1, \\ y = \sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0), \\ y = \sqrt{1-x}, & x\in[0,1], \\ y = 1-x^2, & x>1, \end{cases}$$

$\triangleright$ **8.** Как разрезать квадрат со стороной 7 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна

а) 2017см;

б) 1993 см?

Решение:

а) Отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{1}{2} \times 7$, его разрежем на две части размером $\frac{1}{2} \times \frac{7}{2}$. Оставшуюся часть разрежем на 142 прямоугольника размером $\frac{\frac{13}{2}}{142} \times 7$. Сумма периметров: $P = 142(14 + \frac{13}{142}) + 2(7+1) = 142 \cdot 14 + 13 + 16 = 2017$.

б) Отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{5}{2} \times 7$, его разрежем на две части размером $\frac{5}{2} \times \frac{7}{2}$. Оставшуюся часть разрежем на 140 прямоугольников размером $\frac{\frac{9}{2}}{140} \times 7$. Сумма периметров: $P = 140(14 + \frac{9}{140}) + 2(7+5) = 140 \cdot 14 + 9 + 24 = 1993$.

$\triangleright$ **9.** Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости — 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 14?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. $0+1$ — та же кость, что и $1+0$). Всего можно составить 49 (7*7) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида $0+0$ и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7*7-7}{2} + 7 = 28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n, получаем формулу $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 14, на каждой половинке будет от 0 до 7 очков ($n = 7$), и всего костей будет $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$.

Ответ: 36

$\triangleright$ **10.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2, \\ xy - x + y - 2z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} (x+1) + (y-1) = -2 - 2z, \\ (x+1)(y-1) = 2z^2 + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1)(-2(1+z) - (x+1)) = (z^2 + 2z + 1) + (z^2 - 2z + 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1)^2 + 2(1+z)(x+1) + (z^2 + 2z + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ ((x+1) + (1+z))^2 + (z-1)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1) + (1+z) = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \\ z = 1. \end{cases}$$

Ответ: (-3,-1,1)