$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+x+y=500\\ 2a+2b+2c+2d+2e+2f+3x+y=1000\\ x+y=17 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем удвоенное первое, получим

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Система не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет

▶ 8. Дана линейка без делений. На ней отмечены три точки, расстояния между которыми 2017 см и 1993 см. Докажите, что с помощью этой линейки можно отложить любой отрезок, длина которого выражается любым целым числом сантиметров.

Ответ:

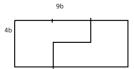
- 1) 2017 1993 = 24
- 2) $1993 = 24 \cdot 83 + 1$
- 3) Имея единичный отрезок, можем построить любой отрезок
- > 9. Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Сколько всего таких чисел?

Решение На первом месте не может стоять 0, остается 4 цифры. На остальных позициях может стоять любая из 5 цифр. Итого получаем N=4.5.5.5.5.5=2500.

Ответ: Всего чисел – 2500

▶ 10. Длина одной стороны прямоугольника составляет 225% другой. Разрежьте этот прямоугольник на две части так, чтобы можно было из них составить квадрат.

Ответ: a = 4b



XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«CAMMAT-2017»

Заключительный тур



7 класс

> 1. Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Какое число записано на 2017 месте?

Решение $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 4 = 2500$ (на первом месте не может стоять 0) Количество чисел, на первом месте которых стоит 1, 2, 3 равно $3 \times 5^4 = 1875$. $10000, 10001, \dots 34444, 40000, \dots 40444, 41000, \dots 41024, 41030, \dots 41031.$

$$2017 - 1875 = 142 = 125 + 17 = 125 + 15 + 2.$$

Итак, на 2017-ом месте записано число 41031.

Ответ: На 2017-ом месте записано число 41031.

ъ 2. Три землекопа за 4 часа выкопали 6 ям. Сколько времени потребуется четырем землекопам, чтобы вырыть 5 ям?

Решение 3 землекопа за 4 часа выкопали 6 ям, следовательно, 1 землекоп за 4 часа выкопает 2 ямы, 1 землекоп за 1 час выкопает 0,5 ямы. Тогда 4 землекопа за 1 час выкопают 2 ямы, а 4 землекопа за 2,5 часа выкопают 5 ям.

Ответ: 2.5 часа

▶ 3. Приведена таблица финала чемпионата Южной Америки по футболу:

					Забитые мячи	Пропущенные мячи	Очки
Аргентина	X			6:0	11	5	4
Бразилия		X	1:3		4	5	3
Перу		3:1	X		7	7	2
Ямайка	0:6			X	3	8	3

Заполните пустые клетки. если известно, что за победу давалось два очка, за ничью — одно очко. Во всех не указанных матчах каждая команда не уходила без забитого гола.

Ответ:

Аргентина	X	1:2	4:3	6:0	11	5	4
Бразилия	2:1	X	1:3	1:1	4	5	3
Перу	3:4	3:1	X	1:2	7	7	2
Ямайка	0:6	1:1	2:1	X	3	8	3

▶ 4. Известно, что у любого Кощея Бессмертного не более 11 зубов. Доказать, что среди 2017 Кощеев может не оказаться двух особ с одним и тем же набором зубов, а среди 20170 найдется по крайней мере 10 Кощеев с одинаковым набором зубов.

Решение: Использовать доказательство от противного. Пронумеруем (возможные) зубы Кощея от 1 до 11, на каждом месте либо есть зуб, либо его нет. Всего получаем $2^{11}=2048$ различных возможных наборов зубов у Кощея, так как 2017<2048, то первое утверждение доказано. Далее, так как $9\cdot 2048<20170$, то среди 20170 Кощеев будет по крайней мере 10 особ с одинаковым набором зубов.

 \triangleright **5.** Пусть $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырехзначные числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = \overline{a_1 a_2} \cdot \overline{a_3 a_4} + 217.$$

Решение: Пусть $x=\overline{a_1a_2},\ y=\overline{a_3a_4}.\ x,y$ — целые двузначные числа. Тогда $100x+y=xy+217,\ 100x-100-xy+y=117,\ (x-1)(100-y)=117=3\cdot 3\cdot 13.$ Тогда либо $x-1=39,\ 100-y=3,\$ либо $x-1=13,\ 100-y=9,\$ либо $x-1=9,\ 100-y=13.$ То есть получаем наборы 40 и 97, 14 и 91, 10 и 87.

Ответ: 1087, 1491, 4097

 \triangleright 6. Из квадрата 7×7 вырезана не угловая клетка. Оставшуюся часть покрыли прямоугольниками 3×1 . Определить вырезанную клетку.

Решение: Раскрасим квадрат по диагоналям в три цвета последовательно: первую диагональ в первый цвет, вторую — во второй, третью — в третий, четвертую — снова в первый и т.д. При такой раскраске любой прямоугольник 3×1 будет содержать все три цвета. Подсчитаем число клеток каждого цвета:

в первый цвет раскрасили первую, четвертую, седьмую, десятую и тринадцатую диагональ – всего 1+4+7+4+1=17 клеток;

во второй цвет раскрасили вторую, пятую, восьмую и одиннадцатую диагональ – всего 2+5+6+3=16 клеток;

в третий цвет раскрасили третью, шестую, девятую, двенадцатую диагональ — всего 3+6+5+2=16 клеток.

Отсюда ясно, что вырезали клетку цвета 1. Повернем квадрат на 90° (так как диагонали могли быть проведены в двух возможных направлениях) и выделим клетки цвета 1, которые сохранили цвет после поворота. Получим 5 подходящих вариантов клеток - центральная и по середине каждой из сторон.

Ответ: 5 подходящих вариантов клеток - центральная и по середине каждой из сторон

 \triangleright 7. Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости — 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 20?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. 0+1- та же кость, что и 1+0). Всего можно составить 49 (7*7) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида 0+0 и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7*7-7}{2}+7=28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n, получаем формулу $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 20, на каждой половинке будет от 0 до 10 очков (n=10), и всего костей будет $\frac{11\cdot12}{2}=66$.

Ответ: 66

hd 8. Известно, что ОДИН+ОДИН=МНОГО. Найдите чему равно ДОМИНО.

Решение 6823+6823=13646

Ответ: 861236

> 9. Каждую вершину квадрата соединили с серединами сторон квадрата, не проходящих через эту вершину. Середины смежных сторон соединили попарно. Найдите площадь фигуры, получившейся при пересечении образовавшихся четырех треугольников.

Решение Пусть
$$a$$
 — сторона квадрата. $S = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\frac{a}{6}\frac{a}{12} = \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{18} = \frac{a^2}{6}$

Ответ: Площадь равна $\frac{a^2}{6}$

▶ 10. Длина одной стороны прямоугольника составляет 18% от его периметра. Разрежьте этот прямоугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было составить квадрат.

Ответ:

