

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

6 класс



▷ 1. С числом разрешено производить две операции: «увеличить вдвое» и «увеличить на 1». Можно ли получить из числа 1 число 2017 за 16 операций?

Решение Можно : $1 > 2 > 3 > 6 > 7 > 14 > 15 > 30 > 31 > 62 > 63 > 126 > 252 > 504 > 1008 > 2016 > 2017$.

▷ 2. В Сбербанк положена сумма в один миллион рублей под некоторые годовые проценты. Какие проценты дает банк, если спустя три года вкладчик получил 1061208 рублей?

Решение Пусть S_0 – первоначальная сумма, p – процентная ставка. Тогда через год на счете будет сумма $S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, через два года $S_2 = S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, через три года $S_3 = S_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. Т.е. $1061208 = 1000000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$, $(100 + p)^3 = 1061208 = 8 \cdot 27 \cdot 17^3$; $100 + p = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$, $p = 2$.

Ответ: 2%

▷ 3. Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости – 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 16?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. $0 + 1$ – та же кость, что и $1 + 0$). Всего можно составить 49 ($7 \cdot 7$) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида $0 + 0$ и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7 \cdot 7 - 7}{2} + 7 = 28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n , получаем формулу $\frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 16, на каждой половинке будет от 0 до 8 очков ($n = 8$), и всего костей будет $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

Ответ: 45

▷ 4. Три землекопа за 4 часа выкопали 6 ям. Сколько ям выкопают два землекопа за 3 часа?

Решение 3 землекопа за 4 часа выкопали 6 ям, следовательно, 1 землекоп за 4 часа выкопает 2 ямы, 1 землекоп за 1 час выкопает $\frac{1}{2}$ ямы. Тогда 1 землекоп за 3 часа выкопает $\frac{3}{2}$ ямы, а 2 землекопа за 3 часа выкопают 3 ямы.

Ответ: 3

▷ 5. В примере ЧАЙ:АЙ=5 каждой букве соответствует своя цифра. Чему равно наибольшее возможное значение Ч+А+Й?

Решение $(100 \cdot \text{Ч} + \text{АЙ}) : \text{АЙ} = 5$, $100 \cdot \text{Ч} + \text{АЙ} = 5 \cdot \text{АЙ}$, $25 \cdot \text{Ч} = \text{АЙ}$. Подберем Ч. Если $\text{Ч} = 1$, то $\text{АЙ} = 25$ и $\text{Ч} + \text{А} + \text{Й} = 1 + 2 + 5 = 8$. Если $\text{Ч} = 2$, то $\text{АЙ} = 50$ и

$\text{Ч} + \text{А} + \text{Й} = 2 + 5 + 0 = 7$. Если $\text{Ч} = 3$, то $\text{АЙ} = 75$ и $\text{Ч} + \text{А} + \text{Й} = 3 + 7 + 5 = 15$. При больших Ч число АЙ становится трехзначным. Следовательно, наибольшее возможное значение Ч+А+Й равно 15.

Ответ: 15

▷ 6. Часы показывают половину четвертого. Через сколько минут минутная стрелка догонит часовую?

Решение В половину четвертого минутная стрелка находится на часах впереди часовой на цифре 6, а часовая – посередине между цифрами 3 и 4. Таким образом, расстояние между ними в это время равно $180^\circ + 90^\circ + 15^\circ$. Часовая стрелка движется со скоростью $\frac{360^\circ}{12\text{ч}} = 30^\circ/\text{ч} = 0,5^\circ/\text{мин}$. Минутная стрелка движется со скоростью $\frac{360^\circ}{60\text{мин}} = 6^\circ/\text{мин}$.

Через t минут часовая стрелка пройдет $0,5t$ градусов, а минутная – $6t$ градусов. Тогда

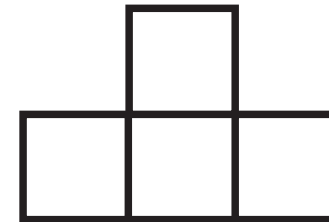
$$6t - 0,5t = 180^\circ + 90^\circ + 15^\circ$$

$$\frac{11}{2}t = 285^\circ$$

$$t = \frac{285 \cdot 2}{11} = \frac{570}{11} = 51 \frac{9}{11}$$

Ответ: $51 \frac{9}{11}$ мин

▷ 7. Чемпион по игре в тетрис утверждает, что он заполнил поле размером 10×200 , используя все фигуры, из них 17 фигур вида, представленного на рисунке.



Могло ли такое быть?

Решение

Раскрасим поле 10×200 как шахматную доску. Так как каждая фигура состоит из четырех клеток, а всего клеток 2000, то использовано 500 фигур. При этом всего белых клеток ровно половина – 1000.

Всего возможных фигур в игре тетрис (кроме фигуры, приведенной выше) – 6 (условно обозначим их буквами a, b, c, d, e, f). Все эти фигуры при "шахматной" раскраске будут иметь две белых и две черных клетки. Фигуру же, приведенную на рисунке, можно раскрасить двумя способами – в первом будет три белых клетки и одна черная клетка (обозначим этот вариант x), а во втором – наоборот, одна белая и три черных клетки (обозначим этот вариант y).

Подсчитаем фигуры и белые клетки в них и получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f + x + y = 500 \\ 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 3x + y = 1000 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем удвоенное первое, получим

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Система не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет

▷ 8. Дана линейка без делений. На ней отмечены три точки, расстояния между которыми 2017 см и 1993 см. Докажите, что с помощью этой линейки можно отложить любой отрезок, длина которого выражается любым целым числом сантиметров.

Ответ:

1) $2017 - 1993 = 24$

2) $1993 = 24 \cdot 83 + 1$

3) Имея единичный отрезок, можем построить любой отрезок

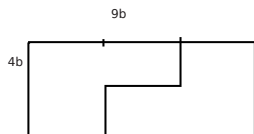
▷ 9. Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Сколько всего таких чисел?

Решение На первом месте не может стоять 0, остается 4 цифры. На остальных позициях может стоять любая из 5 цифр. Итого получаем $N = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$.

Ответ: Всего чисел – 2500

▷ 10. Длина одной стороны прямоугольника составляет 225% другой. Разрежьте этот прямоугольник на две части так, чтобы можно было из них составить квадрат.

Ответ: $a = 4b$



XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

7 класс



▷ 1. Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Какое число записано на 2017 месте?

Решение $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 4 = 2500$ (на первом месте не может стоять 0)

Количество чисел, на первом месте которых стоит 1, 2, 3 равно $3 \times 5^4 = 1875$.

$10000, 10001, \dots, 34444, 40000, \dots, 40444, 41000, \dots, 41024, 41030, \dots, 41031$.

$$2017 - 1875 = 142 = 125 + 17 = 125 + 15 + 2.$$

Итак, на 2017-ом месте записано число 41031.

Ответ: На 2017-ом месте записано число 41031.

▷ 2. Три землекопа за 4 часа выкопали 6 ям. Сколько времени потребуется четверем землекопам, чтобы вырыть 5 ям?

Решение 3 землекопа за 4 часа выкопали 6 ям, следовательно, 1 землекоп за 4 часа выкопает 2 ямы, 1 землекоп за 1 час выкопает 0,5 ямы. Тогда 4 землекопа за 1 час выкопают 2 ямы, а 4 землекопа за 2,5 часа выкопают 5 ям.

Ответ: 2,5 часа

▷ 3. Приведена таблица финала чемпионата Южной Америки по футболу:

| | | | | | Забитые мячи | Пропущенные мячи | Очки |
|-----------|-----|-----|-----|-----|--------------|------------------|------|
| Аргентина | X | | | 6:0 | 11 | 5 | 4 |
| Бразилия | | X | 1:3 | | 4 | 5 | 3 |
| Перу | | 3:1 | X | | 7 | 7 | 2 |
| Ямайка | 0:6 | | | X | 3 | 8 | 3 |

Заполните пустые клетки, если известно, что за победу давалось два очка, за ничью — одно очко. Во всех не указанных матчах каждая команда не ушла без забитого гола.

Ответ:

| | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|----|---|---|
| Аргентина | X | 1:2 | 4:3 | 6:0 | 11 | 5 | 4 |
| Бразилия | 2:1 | X | 1:3 | 1:1 | 4 | 5 | 3 |
| Перу | 3:4 | 3:1 | X | 1:2 | 7 | 7 | 2 |
| Ямайка | 0:6 | 1:1 | 2:1 | X | 3 | 8 | 3 |

▷ 4. Известно, что у любого Коцея Бессмертного не более 11 зубов. Доказать, что среди 2017 Коцеев может не оказаться двух особ с одним и тем же набором зубов, а среди 20170 найдется по крайней мере 10 Коцеев с одинаковым набором зубов.