Получаем
$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \geq 1993 \cdot 2017 = 16079524$$
Подбором определим наименьшее n.

Ответ: $n = 62$

▷ **8.** Можно ли разрезать квадрат 10×10 на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 2017?

Решение: Одно из возможных построений: отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{1}{2} \times 10$, его разрежем на 18 частей размером $\frac{1}{2} \times \frac{10}{18}$. Оставшуюся часть разрежем на 98 прямоугольников размером $\frac{\frac{19}{2}}{98} \times 10$. Сумма периметров: $P = 98(20 + \frac{19}{98}) + 18(\frac{20}{18} + 1) = 98 \cdot 20 + 19 + 20 + 18 = 2017$.

Ответ: да

▷ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной $\sqrt[4]{10}$.

Решение: $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$; $(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) = 1$

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

$x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7 + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})$

$x^3 = 10\sqrt{2} + 3x$, пусть $x = y\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}y^3 - 3\sqrt{2}y - 10\sqrt{2} = 0$

$2y^3 - 3y - 10 = 0$

$(y-2)(2y^2 + 4y + 5) = 0$

$y = 2$, $x = 2\sqrt{2}$.

Имея отрезок длиной $2\sqrt{2}$ можно построить отрезок длиной $\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляр длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в середине данного отрезка получим прямоугольный треугольник с катетом 1. Имея отрезок длиной 1, построим прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3, получим гипотенузу $\sqrt{10}$. Поскольку $\sqrt[4]{10} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{10}}$, то откладывая на прямой от одной точки O в разные стороны отрезки 1 и $\sqrt{10}$ и строя на получившемся отрезке как на диаметре окружность, можем провести из точки O прямую h, перпендикулярную исходной прямой и получить точку пересечения h с окружностью. Расстояние от этой точки до исходной прямой $\sqrt[4]{10}$.

▷ **10.** В одной прямоугольной половине квадрата 20×20 проведена единичная окружность, центр которой удален не менее, чем на 3 единицы от ее границы.

Случайным образом на второй половине, не видя первую окружность, рисуется такая же единичная окружность. Какова вероятность того, что существует квадрат, две противолежащие вершины которого принадлежат окружностям, а две другие — общей границе этих половин?

Решение: Чтобы построить необходимый квадрат, нужно отобразить окружность, относительно данной прямой, (если существуют точки пересечения этих окружностей, то такой квадрат существует) получив точку пересечения, через нее перпендикулярно данной прямой провести прямую, отрезок соединяющий 2 противолежащие окружности — диагональ квадрата, отложив такой же отрезок на прямой получаем вершины квадрата.

Ответ: $\pi/36$

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** Решите уравнение $\sin x = 2\sin 20^\circ \sin(170^\circ - x)$.

Решение: $\sin(170^\circ - x) = \sin(x + 10^\circ) = \sin x \cos 10^\circ + \cos x \sin 10^\circ$

$\sin x = 2\sin 20^\circ(\sin x \cos 10^\circ + \cos x \sin 10^\circ)$

$\sin x = 2\sin 20^\circ \sin x \cos 10^\circ + 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$\sin x(1 - 2\sin 20^\circ \cos 10^\circ) = 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$1 - 2\sin 20^\circ \cos 10^\circ = 1 - \sin 30^\circ - \sin 10^\circ = \frac{1}{2} - \sin 10^\circ = \sin 30^\circ - \sin 10^\circ = 2\sin 10^\circ \cos 20^\circ$

$2\sin 10^\circ \cos 20^\circ \sin x = 2\sin 20^\circ \cos x \sin 10^\circ$

$\cos 20^\circ \sin x - \sin 20^\circ \cos x = 0$

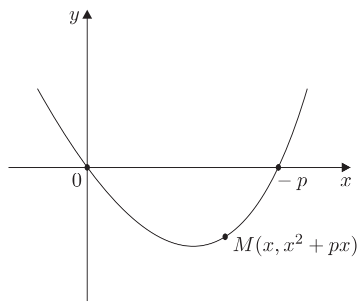
$\sin(x - 20^\circ) = 0$

$x = 20^\circ + 180^\circ n$

Ответ: $x = \pi/9 + \pi n$

▷ **2.** Точка начинает движение из начала координат и движется по графику функции $y = x^2 + px$ и не меняет направление движения. При каком p эта точка всегда удаляется от начала координат?

Решение:



Пусть для определенности $p \leq 0$. если $p = 0$, то $y = x^2$ — подходит. Пусть $p < 0$. Функции $f(x) = OM = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2 + px - 0)^2}$ должна быть возрастающей, т.е. функция $y = x^2 + (x^2 + px)^2$ — возрастающая.

$y' = 2x + 2(x^2 + px)(2x + p) \geq 0$

При $x < 0$ — является возрастающей.

При $x > 0$ — неизвестно.

Сократим на $2x$:

$1 + (x + p)(2x + p) \geq 0$

$2x^2 + 3px + (p^2 + 1) \geq 0$

$x^2+\frac{3}{2}px+\frac{p^2+1}{2}\geq 0$
$(x+\frac{3}{2}p)^2+\frac{8p^2+8-9p^2}{16}\geq 0,$
$(x+\frac{3}{2}p)^2+\frac{8-p^2}{16}\geq 0, \forall x$, следовательно $8-p^2\geq 0$.
Ответ: $|p|<2\sqrt{2}$

▷ **3.** При каком наименьшем n неравенство

$$x^2+x\leq \overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}$$

имеет не менее 2017 решений, кратных 1993?

Решение:

$$x^2+x-\overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}\leq 0$$

$$x^2+px+q\leq 0$$

$$p=-1, q=-\overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}$$

$$D=p^2-4q=\overline{\underbrace{44\dots4}_{n}\underbrace{88\dots8}_{n-1}9}$$

$$\underbrace{99\dots9}_{n}=10^n-1$$

$$D=\underbrace{44\dots4}_{n}\cdot 10^n+\underbrace{88\dots8}_{n}+1=\frac{4}{9}(\underbrace{99\dots9}_{n})\cdot 10^n+\frac{8}{9}(\underbrace{99\dots9}_{n})+1=$$

$$=\frac{4}{9}(10^n-1)\cdot 10^n+\frac{8}{9}(10^n-1)+1=\frac{4}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{4}{9}\cdot 10^n-\frac{8}{9}+1=\frac{4}{9}\cdot 10^{2n}+\frac{4}{9}\cdot 10^n+\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}((2010^n)^2+2(2\cdot 10^n)+1)=\frac{1}{9}\cdot(2\cdot 10^n+1)^2=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2=\left(\frac{200\dots01}{3}\right)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 666\dots67}{2}$$

$$x_1=\underbrace{33\dots34}_{n}$$

$$x_2=-\underbrace{33\dots34}_{n}$$

$$x\in\left[-\underbrace{33\dots34}_{n};\underbrace{33\dots34}_{n}\right]$$

$$N=\underbrace{66\dots68}_{n}$$

N— число целых решений.

$$\underbrace{66\dots68}_{n}\leq\underbrace{1993\cdot 2017}_{4019781}$$

т.е. $n=6$.

Ответ: 6

▷ **4.** Если поверхность треугольной пирамиды разрезать вдоль ребер, выходящих из вершины, то ее развертка на плоскости основания является квадратом. Найти отношение поверхностей сфер, вписанной и описанной около этой пирамиды.

Ответ: 24:1

▷ **5.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x_1^4+x_2^4+\dots+x_{13}^4=2017?$$

Решение:

Если x— четно, то $x^4\equiv 0(\mod 16)$, а если x— нечетно, то $x^4\equiv 1(\mod 16)$. Так как $2017=16\cdot 126+1(\mod 16)$, то ровно одно x_k — нечетно, остальные четны.

1) Пусть это нечетно число равно 1, для определенности возьмем $x_{13}=1$, остальные — четные.

$$(2y_1)^4+(2y_2)^4+\dots+(2y_{12})^+1=1+16\cdot 126$$

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=126$$

Имеем: $126=7\cdot 16+14$. Слева сумма остатков при делении на 16 не превышает 12, следовательно решений нет.

2) Пусть $x_{13}=3$, тогда придем к уравнению

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=121=7\cdot 16+9$$

Значит, ровно 9 y_k нечетны, а 3 — четны. Четные y_k не могут быть больше 2, так как $4^4=256$. Значит, они равны по 2:

$$y_1^4+\dots+y_9^4+2^4+2^4+2^4=7\cdot 16+9$$

$$y_1^4+\dots+y_9^4=73$$

Нечетные y_k не могут быть больше 1, так как $3^4=81>73$, значит, все они равны 1. Но $9\cdot 1<73$, следовательно решений нет.

2) Пусть $x_{13}=5$, тогда:

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=87=16\cdot 5+7$$

Значит, ровно 7 нечетных, 5 — четных, следовательно $(y_k)=(1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2)$. $(x_k)=(2,2,2,2,2,2,2,4,4,4,4,4,5)$ и перестановки этих чисел.

Ответ: $\frac{13!}{7!\cdot 5!}$

▷ **6.** В трех неодинаковых банках с водой растворили по килограммовой пачке сахара, получив 40%, 60%, q% растворы сахара. После этого смешали все три раствора сахара в один объем и получили p% раствор сахара. Скольки процентный раствор сахара был в третьей банке, если $23 \le p \le 25$ и q — целое число?

Решение: Пусть в первой банке было x л воды, тогда $\frac{1}{x+1} = 0,4$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Пусть во второй банке было y л воды, тогда $\frac{1}{y+1} = 0,6$, откуда $y = \frac{2}{3}$. Пусть в третьей банке было z л воды, тогда $\frac{1}{z+1} = \frac{q}{100}$, $z = \frac{100}{q} - 1$. После смешивания получим $\frac{3}{x+y+z+3} = \frac{p}{100}$

$$0,23 \le \frac{3}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{100}{q}-1+3} \le 0,25$$

$$0,23 \le \frac{18}{25+6\frac{100}{q}} \le 0,25$$

Решая оба неравенства, получаем

$$\frac{23\cdot 24}{49} \le q \le \frac{24\cdot 25}{49}$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этим условиям — 12.

Ответ: 12%

▷ **7.** Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}+\dots+\sqrt{x_{2017}-1}$, если $x_1, x_2, \dots, x_{2017} \ge 1$ и $x_1+x_2+\dots+x_{2017} = 4034$.

Решение: $\sqrt{x-1} \ge \frac{x}{2}$ $\forall x$, равенство при $x=2$, следовательно $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_3-1}+\dots+\sqrt{x_{2017}-1} \ge \frac{1}{2}(x_1+\dots+x_{2017}) = \frac{4034}{2} = 2017$.

Ответ: 2017

▷ **8.** Дан квадратный стол размера 20×20, на котором проведена диагональ. В одном из рассматриваемых треугольников дана окружность радиуса 1, центр которой удален от границ этого треугольника не менее чем на 3. В другом треугольнике случайным образом, не видя другой половины квадрата, проводится такая же окружность. Доказать, что вероятность того, что существует квадрат, два противоположных угла которого лежат на окружностях, а два других на общей границе этих треугольников не превосходит 10%.

Ответ: Чтобы такой квадрат существовал, окружности должны иметь хотя бы одну общую точку, значит, если отобразить окружность в противоположную часть стола, то центр второй окружности должен находиться на окружности R $= 2$, когда S благоприятных центров для второй окружности 4π, а вся $S = 8\cdot 18$.

▷ **9.** При каком a уравнение

$$\max_{x\le t\le x+1}(t^3-4t) = a$$

имеет ровно два решения или больше трех решений?

Решение: Рассмотрим функцию $y = t^3-4t$. Производная $y\prime = 3t^2-4$ обращается в ноль при $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,17$. Максимум — в точке $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Далее, рассмотрим уравнение $y(x+1) = y(x)$, $x^3+3x^2+3x+1-4x-4 = x^3-4x$, $3x^2+3x-3=0$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Вычислим значения y:

$y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$

$y\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$

$y\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\sqrt{5}$

Обозначим $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Тогда

$$y = \max_{x\le t\le x+1}(t^3-4t) = \left[\begin{array}{ll} y(x+1), & x \le x_0-1 \\ y(x_0), & x_0-1 \le x \le x_0 \\ y(x), & x_0 \le x \le x_2 \\ y(x+1), & x \ge x_2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-\sqrt{5}$, $\frac{16}{9}\sqrt{3}$

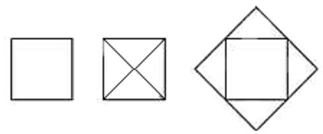
▷ **10.** Способом разрезания составьте квадрат из:

а) двух равных квадратов;

б) трех равных квадратов.

Ответ:

а)



б)