9 класс. Решение задач.

$\triangleright$ **1.** Назовем хромой ладьей фигуру, которая бьет как обычная ладья, но не далее, чем на 2 клетки. Какое наибольшее число хромых ладей можно поставить на шахматной доске 8×8?

Решение.

22. В каждой горизонтали может быть не более трех хромых ладей, на соседней горизонтали тоже не более 3-х, а на третьей — не более двух, т.е. $8-6=2$. Получаем не более : $3+3+2+3+3+2+3+3=22$ или $24-2=22$ (две горизонтали не по 3, а по 2).

$\triangleright$ **2.** При каком наименьшем n квадрат можно разделить на n треугольников, площади которых относятся как $1:3:5:\ldots:(2n-1)$?

Решение.

При $n=1$ и $n=2$ — нет.

Если $n=3$, то площадь самого большого треугольника больше половины площади квадрата: $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, что невозможно.

При $n=4$ — можно,так как 1+7 = 3+5.

$\triangleright$ **3.** Даны 2016 натуральных чисел $a_k = k!$, $k=\overline{1,2016}$. Можно ли из этой последовательности выбрать 2015 членов, произведение которых будет точным квадратом?

Решение.

$S=(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4)\ldots(a_{2015}\cdot a_{2016}) = (1!)^2\cdot 2\cdot (3!)^2\ldots(2015!)^2\cdot 2016.$

Так как $a_{k+1}=a_k(k+1)$, то

$S=(1!)^2\cdot(3!)^2\ldots(2015!)^2\cdot(2\cdot 4\ldots 2016) = (1!)^2\cdot(3!)^2\cdot\ldots(2015!)^2\cdot 2^{1008}\cdot 1\cdot 2\ldots 1008 = (2^{504}\cdot 1!\cdot 3!\ldots 2015!)^2\cdot 1008!$, т. е.

$a_1\cdot a_2\ldots a_{1007}\cdot a_{1009}\ldots a_{2016}=N^2$

$\triangleright$ **4.** Найти все простые p и целые x такие,что

$x(x+1)(x^4-x+1)=13p-1.$

Решение.

Перепишем в виде

$$(x^2+x)(x^4-x+1)+1=13p;$$

$$x^6+x^5-x^3-x^2+x^2+x+1=13p;$$

$$(x^6+x^5+x^4)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=13p;$$

$$(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)=13p;$$

Возможны случаи:

1)

$$\begin{cases} x^2+x+1=1; \\ x^4-x^2+1=13p \end{cases}$$

$x^2+x=0$, т.е. $x_1=0$, $x_2=-1$, следовательно, $13p=1, p\notin Z$

2)

$$\begin{cases} x^2+x+1=13; \\ x^4-x^2+1=p \end{cases}$$

$x^2+x-12=0$, отсюда $x_1=3$, $x_2=4$ и $p_1=73$, $p_2=241$.

3)

$$\begin{cases} x^2+x+1=1; \\ x^4-x^2+1=13p \end{cases}$$

$x^4-x^2=0$, т. е. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, получаем, что $13p_1=1$, $13p_2=3$, $13p_3=1$, $p_1,p_2,p_3\notin Z$

3)

$$\begin{cases} x^2+x+1=13; \\ x^4-x^2+1=p \end{cases}$$

$x^2=4$, получаем $x_1=2$, $x_2=-2$,т. е. $p_1=7$, $p_2=3$.

Итак, при $x_1=-2$ $p_1=3$, $x_2=2$ $p_2=7$, $x_3=3$ $p_3=73$, $x_4=-4$ $p_4=241$.

Ответ: $x_1=-2$ $p_1=3$, $x_2=2$ $p_2=7$, $x_3=3$ $p_3=73$, $x_4=-4$ $p_4=241$.

$\triangleright$ **5.** Пусть $f(x)=ax^2+bx+c, c\neq 0$. Известно, что уравнение $f(x)=2016x+1$ не имеет действительных корней.

Доказать, что уравнение

$$f(f(x))=2016^2x+2017.$$

также не имеет корней.

Решение.

1) a >0, тогда

$$f(x)>2016x+1, \forall x,$$

в частности

$$f(f(x))>2016f(x)+1>2016(2016x+1)+1=2016^2x+2017, \forall x.$$

2) a <0, тогда

$$f(x)<2016x+1,$$

следовательно,

$$f(f(x))<2016f(x)+1<2016(2016x+1)+1=2016^2x+2017, \forall x$$

$\triangleright$ **6.** В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медианы AA_1 и биссектрисы BB_1, а $\frac{AM}{MA_1}=\frac{BM}{MB_1}$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение.

Пусть $\frac{AM}{MA_1}=\frac{BM}{MB_1}=k$.

Положим $B_1M=d$, $MA_1=e$, $AB=c$, $BC=a$.

Тогда по формулам длин биссектрис BB_1 в треугольнике ABC и BM в треугольнике ABA_1:

$$\begin{cases} (k+1)d=\frac{2cd}{c+a}\cos\frac{B}{2}; \\ kd=\frac{2c\frac{a}{2}}{c+\frac{a}{2}}\cos\frac{B}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{k+1}{k}=\frac{2}{c+a}(c+\frac{a}{2}),\frac{a}{c}=k-1.$$

По свойству биссектрисы в треугольнике AA_1B

$$\frac{ke}{e}=\frac{c}{\frac{a}{2}}=\frac{2c}{a}=\frac{2c}{c(k-1)},$$

$k=\frac{2}{k-1}$,
$k^2-k-2=0$, $k=2$.
Значит, $a=c(2-1)=c$. Что и требовалось доказать.

$\triangleright$ **7.** На какое наибольшее число выпуклых частей могут разрезать плоскость продолжения сторон выпуклого n-угольника?

Решение.

Воспользуемся математической индукцией. Пусть верно при $n-1$. Шаг индукции: n. n-я прямая может пересечься со всеми $n-1$ прямыми (продолжениями сторон), так же добавится еще и n кусков, следовательно,

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$\triangleright$ **8.** У некоторой арифметической прогрессии сумма S_n удовлетворяет условию $S_{1007}=S_{1009}$. Чему равна S_{2016}?

Решение.

$$S_{1007}=a_1+\dots+a_{1007};$$

$$S_{1009}=a_1+\dots+a_{1009};$$

$$a_{1008}+a_{1009}=2a_1+2015d=0;$$

$$S_{2016}=\frac{a_1+a_{2016}}{2}\cdot 2016=\frac{2a_1+2015d}{2}\cdot 2016=0.$$

$\triangleright$ **9.** Дана возрастающая последовательность чисел, не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7. Каким по счету будет число 3377, если первый член ряда равен 11?

Решение.

$11,13,17,\dots,3377$
$U_n=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$
$3377=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$
$U_{1123}=3377$
Выпишем члены последовательности, кратные 5
$5\cdot 5,5\cdot 7,5\cdot 11,5\cdot 13,\dots,5\cdot 673$.
Их $673=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$, $n=226$.
$5=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$, $n=1$.
Всего их будет 224, так как

$$673=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2},n=224.$$

Следовательно, в данной последовательность 889 чисел, не кратных 30.
Выпишем числа, кратные 7 :

$$7\cdot 5,7\cdot 7,7\cdot 11,7\cdot 13,\dots,7\cdot 481.$$

Таких чисел будет 160. Но среди них есть и числа, кратные 5 :

$$5,5\cdot 5,5\cdot 7,\dots,5\cdot 95.$$

Этих чисел 32.
Итак, число 3377 имеет номер, равный

$$899-160+32=771.$$

$\triangleright$ **10.** В племени древних шумеров считалось, что параллелепипед «красивый» , если из его трех ребер, которые измерялись целыми числами, можно сложить прямоугольный треугольник. Какой наименьший объем кратный 2016 можно было бы отмерить с помощью «красивого» параллелепипеда?

Решение.

Пусть a,b,c — стороны «красивого» параллелепипеда, тогда $a^2+b^2=c^2$ и произведение измерений параллелепипеда должно делиться на 60.

При делении a,b,c на 5 остаток равен ± 1, т.е. $a,b,c=3m\pm 1\Rightarrow a^2+b^2\neq c^2$;

При делении a,b,c на 3 остаток равен ± 1, т.е. $a,b,c=5m\pm 21\Rightarrow a^2+b^2=$ $=5N+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; $c^2=5N+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, т.е. $abc:60$.

$2016=4\cdot 8\cdot 63=12\cdot 8\cdot 21$;
$5V=60\cdot 168$, т.е. наименьший объем — $60\cdot 168$.