8 класс. Решение задач.

$\triangleright$ **1.** Однажды первый вторник месяца я провел в Самаре, а первый вторник после первого понедельника — в Белгороде. В следующем месяце я первый вторник провел в Саранске, а первый вторник после первого понедельника — в Тольятти. Какого числа и какого месяца я был в каждом из городов?

Решение.

Получается, что в Самаре 1 числа месяца, в Белгороде — 8 числа, следовательно, чтобы в следующем месяце 1 число было вторником, надо чтобы прошло ровно по семь дней недели 4 раза, а значит первый месяц был февралем простого, не високосного года. В итоге, 1 февраля — Самара, 8 февраля — Белгород, 1 марта — Саранск, 8 марта — Тольятти.

$\triangleright$ **2.** Найдите четырехзначное число, являющееся полным квадратом, у которого первые две цифры одинаковы и последние две цифры одинаковы.

Ответ : 7744.

$\triangleright$ **3.** С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый половину времени шел со скоростью a, а вторую половину со скоростью b. Второй шел первую половину пути со скоростью a, а вторую со скоростью b. Который из них скорее пришел к месту назначения?

Решение.

Пусть первый пассажир пришел в конечный пункт через t_1 часов, а второй через t_2 часов. Расстояние до места назначения обозначим через d. Тогда первый пассажир за первую половину времени $\frac{t_1}{2}$ прошел расстояние $\frac{at_1}{2}$, за вторую $\frac{bt_1}{2}$. Отсюда :

$$\frac{at_1}{2}+\frac{bt_1}{2}=d, t_1=\frac{2d}{a+b}.$$

Вторую половину расстояния, т.е. $\frac{d}{2}$, шел со скоростью a. вторую половину со скоростью b. Отсюда:

$$t_2=\frac{d}{2a}+\frac{d}{2b}=\frac{d(a+b)}{2b}.$$

Возьмем разность

$$t_2-t_1=\frac{d(a+b)}{2ab}-\frac{2d}{a+b}=\frac{d((a+b)^2-4ab)}{2ab(a+b)}=\frac{d(a-b)^2}{2ab(a+b)}.$$

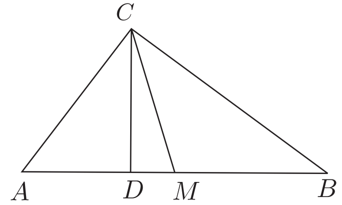
Так как все множители в правой части положительны, то $t_2-t_1>0$, т. е. $t_2>t_1$ и, следовательно, первый пришел раньше второго (при $a=b$ будет $t_1=t_2$).

$\triangleright$ **4.** По высоте, опущенной из вершины прямого угла и разности острых углов построить прямоугольный треугольник.

Решение.

Пусть треугольник ABC — искомый. Проведем высоту CD и медиану CM. Известно, что

$$\angle DCM=\angle CAB-\angle CBA.$$



Известно также, что $CM=\frac{1}{2}AB$.

Таким образом, построив треугольник CDM, можно будет легко построить и треугольник ABC.

$\triangleright$ **5.** Пусть $\mathrm{S}(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Найдите наименьшее n такое, что

$$\mathrm{S}(n)+\mathrm{S}(n+1)=2016.$$

Ответ : $5\underbrace{9\ldots9}_{110}89$

$\triangleright$ **6.** Вершины куба находятся в целочисленных точках, а ребра куба параллельны осям координат. Оказалось, что можно указать 2016^3 различных прямоугольных параллелепипедов, грани которых параллельны граням куба и находятся целочисленных точках. Чему равно ребро куба?

Решение.

$\underbrace{0\ldots n}_{n+1}$;

$(\frac{(n+1)n}{2})^3=2016^3$;

$63\cdot 62=\frac{63\cdot 64}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$, отсюда $n=63$.

$\triangleright$ **7.** Вычислить

$$\sqrt[3]{N},$$

где

$$N=10\ldots030\ldots030\ldots01,$$

где в каждой группе 2016 нулей.

Решение.

Это число имеет $3\cdot 2016+4$ цифры и может быть записано так

$$N=1\cdot 10^{3\cdot 2017}+3\cdot 10^{2\cdot 2017}+3\cdot 10^{2017}+1=(10^{2017}+1)^3=1\underbrace{00\ldots0}_{2016}1$$

$$\sqrt[3]{N}=10^{2017}+1.$$

$\triangleright$ **8.** Числитель дроби увеличили на 26%. На сколько процентов надо уменьшить знаменатель, чтобы дробь возросла в 2016 раз?

Решение.

$\frac{m}{n}$ — исходная дробь.

$$\frac{m\left(1+\frac{p}{100}\right)}{n\left(1-\frac{q}{100}\right)} = 2016\frac{m}{n};$$

$$1+\frac{p}{100} = 2016\left(1-\frac{q}{100}\right);$$

$$100+p = 2016-100-q\cdot 2016;$$

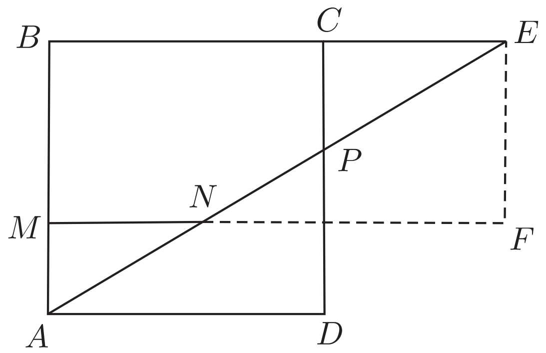
$$q = \frac{2015}{2016}\cdot 100 - \frac{p}{2016};$$

$p = 26$ по условию, т.е.

$$q = \frac{201474}{2016} = \left(100-\frac{1}{16}\right)\% = 99,9375\%.$$

▷ **9.** Квадрат со стороной a превратить в прямоугольник, разрезая его на наименьшее число частей притом так, чтобы стороны прямоугольника относились как $3:1$

Решение.



Пусть сторона квадрата равна a, меньшая сторона прямоугольника x. Тогда :

$$3x^2 = a^2,$$

откуда:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Большая сторона

$$3x = a\sqrt{3} = a\,\mathrm{tg}\,60^\circ.$$

Строим $\angle BAN = 60^\circ$ и продолжаем AN до пересечения с продолжением BC в точке E. Из треугольника ABE имеем:

$$BE = AB\cdot \mathrm{tg}\,60^\circ = a\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 3x,$$

т. е. BE — большая сторона искомого прямоугольника. От вершины B по BA отложим меньшую сторону $BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и проведем $MN \parallel BC$ до пересечения с AE.

Тогда имеем:

$$CE = BE - BC = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3}-1).$$

С другой стороны, из подобия треугольников AMN и ABE заключаем :

$$\frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AB}.$$

Отсюда :

$$MN = \frac{AM\cdot BE}{AB} = \frac{\left(a-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\cdot a\sqrt{3}}{a} = a(\sqrt{3}-1).$$

Получаем, что

$$CE = MN,$$

значит, $\Delta AMN = \Delta PCE$.

Так же легко показать, что

$$\Delta ADP = \Delta NFE.$$

Итак, для превращения квадрата $ABCD$ в требуемый прямоугольник достаточно разбить его на три части : $MBCPN$, AMN и APD.

▷ **10.** Разгадайте ребус

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & * & * & 2\\
\times & & & & \\
 & & & * & 2\\
\hline
 & * & 0 & 0 & *\\
* & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & 1 & 1
\end{array}$$

Решение.

Троичная система счисления

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 1 & 1 & 2\\
\times & & & & \\
 & & & 2 & 2\\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Таблица умножения

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11