7 класс. Решение задач.

▷ **1.** Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель на 10. Может ли при этом увеличиться дробь? Если да, то сколько существует таких несократимых дробей со знаменателем 2016.

Решение.

▷ **2.** Часы пробили ровно 3 часа. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 20 часов 16 минут?

Ответ :143°.

▷ **3.** В координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны параллельны осям координат. Оказалось,что можно составить 2016^2 различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат, а вершины — целочисленные точки, принадлежащие этому квадрату. Чему равно n?

Ответ: 63

▷ **4.** Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то результат нацело разделится на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Если к числу прибавить 4, то результат разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то разделится на 5. И это еще не все : если к этому замечательному числу прибавить 7, то результат разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

Ответ : 41.

▷ **5.** На какое наименьшее число частей надо разрезать торт, чтобы его можно было раздать поровну как троим, так и четверым?

Предупреждение. Части не обязательно одинаковые. Ответ 12 (=НОК[3,4]) неверен.

Указание. Если торт разрезан на 5 частей и эти части розданы поровну троим, то хотя бы одному из троих досталась всего лишь одна часть. В таком случае эта часть составляет $\frac{1}{3}$ торта. Поскольку $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, то в рассматриваемом случае торт нельзя поровну раздать четверым.

Решение.

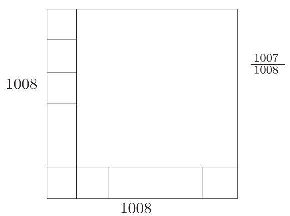
Ответ : 6 частей : $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}$.

▷ **6.** Можно ли квадрат разрезать: а) на 2016 квадратов; б) на 2012 квадратов.

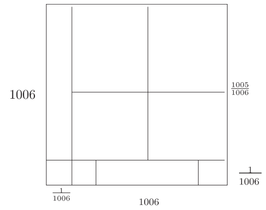
Решение.

Можно.

а) $2016 = 1 + 2015 = 1 + (2 \cdot 1008 - 1)$.



б) $2012 = 1 + 2011 = 1 + (2 \cdot 1006 - 1)$.



▷ **7.** На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов, всех из названных поровну. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 3 балла, на средний — 4 баллов, а на трудный — 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 3 балла. На неправильный ответ на средний вопрос — 2 балл, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Вася ответил более, чем на половину вопросов правильно и получил 30 баллов.

На сколько всего вопросов Вася ответил правильно, и сколько всего вопросов было предложено на викторине?

Решение.

Пусть на викторине было n легких, n средних и n трудных вопросов. Пусть Вася ответил на a легких, b средних и c трудныъ вопросов. Поэтому он получил $3a - 3(n-a) + 4b - 2(n-b) + 6c = 6(a+b+c) - 5n$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c) - 5n = 30$, или $6(a+b+c) = 30 + 5n$. Из полученного равенства получаем, что $n \vdots 6$. Тогда, очевидно, $n \geq 6$. При $n = 6$ общее число вопросов на викторине $3n = 18$. Из них Вася ответил правильно на

$$a + b + c = (5 \cdot 6 + 30) : 6 = 10$$

вопросов, что составляет более половины от 18. Легко проверить, что все условия выполняются, например, при $a = 5, b = 3, c = 2$.

Докажем, что при $n > 6$ не удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $n > 6$ и, значит, с учетом делимости на 6, при $n \geq 12$, отношение числа правильно данных Васей ответов к числу вопросов равно

$$\frac{a+b+c}{3n} = \frac{5 + 5n : 6}{3n} = \frac{5}{3n} + \frac{5}{18} < [n \geq 12] < \frac{5}{36} + \frac{5}{18} = \frac{15}{36} < \frac{1}{2},$$

что противоречит условию задачи о том, что Вася правильно ответил более чем на половину вопросов. Таким образом, Вася правильно ответил на 10 вопросов из 18, предложенных на викторине.

▷ **8.** Придумайте 2016 натуральных чисел. укоторых и сумма, и произведение равны.

Решение.

$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{2014} \cdot 6 \cdot 404 = 2424.$

$2014 + 6 + 404 = 2424.$

Ответ : $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2014}, 6, 404$.

▷ **9.** Сумму двух дробей

$$\frac{2017}{99999} + \frac{2015}{9999}$$

обратили в десятичную дробь. Какая цифра стоит на 2016 месте после запятой?

Ответ : 5.

▷ **10.** Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

Решение.

$9999^2 = 99980001$.

Ответ : нет.