11 класс. Решение задач.

▷ **1.** Два одинаковых куба с ребром a имеют диагонали на одной и той же прямой, вершина второго куба лежит в центре первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем их общей части и радиус вписанного шара.

Решение.

Общая часть этих двух кубов представляет собой пару правильных треугольных пирамид, сложенных вместе основаниями, причем плоские углы при вершинах этих пирамид все прямые, так что каждая из них представляет собой $\frac{1}{6}$ куба с ребром $b = AB$. Искомый объем V общей части кубов равен, следовательно,

$$2\frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Остается найти ребро b. Для этого заметим, что высота каждой из пирамид равна $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, как треть диагонали куба с ребром b. Но удвоенная высота пирамиды равна половине OB диагонали заданного куба с ребром a, т. е.

$$\frac{2}{3}b\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$b = \frac{3}{4}a.$$

Объем равен $\frac{9a^3}{64}$.

▷ **2.** Найти сумму действительных корней уравнения

$$|x^3 - 3x^2 + 5x + 3| = 14.$$

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 11 = 0, x^3 - 3x^2 + 5x + 17 = 0,$$

которые после подстановки $x = y + 1$ преобразуются в уравнения

$$y^3 + 2y - 8 = 0, y^3 + 2y + 20 = 0.$$

Легко увидеть, что в левых частях стоят монотонно возрастающие функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения.

$y = x^3 - 3x^2 + 5x \uparrow y(x) = const$ — единственное решение.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$, $D < 0$, следовательно, $y' > 0$ для любого x.

$x^3 - 3x^2 + 5x - c = 0$, $x = y + 1$, $c_1 = 11$, $c_2 = -17$.

$y^3 = 2Y = 3 - c = 0$

$y = u + v$;

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + 2(u + v) + 3 - c = 0$;

$$\begin{cases} uv = -\frac{2}{3}; \\ u^3 + v^3 = -q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{8}{27}; \\ u^3 + v^3 = -q; \end{cases}$$

$t^2 + qt - \frac{8}{27} = 0$, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{8}{27} = \frac{(3-c)^2}{4} + \frac{8}{27} > 0$

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$

Уравнения имеют, следовательно, ровно по одному действительному корню, которые, согласно формуле Кардано, равны

$$y_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{\frac{8}{27} + 16}}$$

и

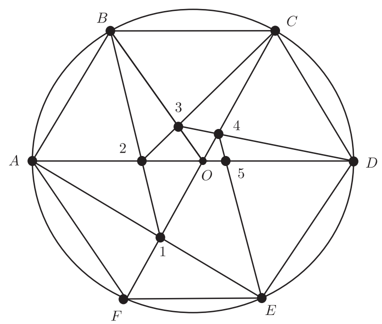
$$y_2 = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{8}{27} + 100}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{8}{27} + 100}}$$

соответственно. Искомая сумма поэтому равна

$y_1 + 1 + y_2 + 1 = 2 + \sqrt[3]{4 + \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{8}{27} + 100}} +$
$+ \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{8}{27} + 100}}$

▷ **3.** В круг вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить $\frac{1}{n}$ часть радиуса, где $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$.

Решение.



Для правильного шестиугольника $ABCDEF$

1. Проводим AD.
2. Проводим CF.
3. Проводим AE. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$.
4. Проводим $B1$. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$; это следует из подобия треугольников $B1C$ и $21O$

$$\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}.$$

5. Проводим BO.

6. Проводим $C2$. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.
Из подобия треугольников $23O$ и $2CD$:

$$\frac{O3}{R} = \frac{O2}{D2} = \frac{1}{4}$$

7. Проводим $D3$. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.
8. Проводим $E4$. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$; и т. д.

▷ **4.** Пусть $\mathrm{P}(N)$ — произведение цифр натурального числа N. Сколько существует последовательных натуральных трехзначных чисел N_1, N_2, N_3, $N_4 \ldots N_7$, в записи которых нет нулей,таких,что $\mathrm{P}(N_1) + \mathrm{P}(N_2) + \ldots + \mathrm{P}(N_7) = 2016$?

Решение.
$x = \overline{1,9}$, $y = \overline{0,9}$, $z \neq 0$, $z + 6 \neq 0$.
$\mathrm{P}(N_1) = xyz$
$\mathrm{P}(N_2) = xy(z+1)$
$\ldots$
$\mathrm{P}(N_7) = xy(z+6)$
$\mathrm{P}(N_1)+\mathrm{P}(N_2)+\cdots+\mathrm{P}(N_7) = xy(z+z+1+\cdots+z+6) = xy(7z+21) = 7xy(z+3)$.
$xy(z+3) = 32 \cdot 9$
1) $z = 1, xy = 8 \cdot 9$
(8,9,1); (9, 8, 1)
2) $z = 2, xy \cdot 5 = 32 \cdot 9$,
$(x, y) \notin \varnothing$
3) $z = 3, xy = 48$
(6,8,3); (8,6,3)
Ответ : 4.

▷ **5.** Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2\arccos x - \arccos y} \cdot (|x| + |y| - 1) = 0; \\ \sqrt{2\arccos y - \arccos x} \cdot (|x+y| + |x-y| - 1) = 0 \end{cases}$$

Решение.
Построив графики функций, находим точки пересечения, которые являются решениями системы : $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})(1), (-1; 0)(2), (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(3), (0; -1)(4)$, $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(5), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})(6), (1; 1)(7)$.
Составим систему :

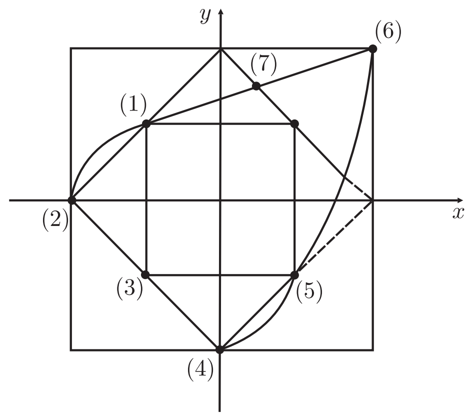
$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1; \\ x = 1 - y \end{cases}$$

Получаем, $2y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4};$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

Ответ : $(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}), (-1; 0), (0; -1), (1; 1), (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4})$.



▷ **6.** Найдите две последние цифры числа

$$[(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2016}],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Решение.
$\alpha = \sqrt{29} + \sqrt{21}$, $\beta = \sqrt{29} - \sqrt{21} \in (0; 1), \beta^n \in (0; 1)$.
Корни:
$a = \alpha^2 = 50 + 2\sqrt{609}$
$b = \beta^2 = 50 - 2\sqrt{609}$
$x^2 - 100x + 64 = 0$
$S_n : S_n = a^n + b^n : S_n - 100S_{n-1} + 64S_n = 0, S_0 = 2.$
$a^n + b^n = \underbrace{(a+b)}_{100}(a^{n-1} + b^{n-1}) - \underbrace{ab}_{64}(a^{n-2} + b^{n-2}).$
$S_n - 100(S_{n-1} - S_{n-2}) = 36S_{n-2}$
$S_n = 36S_{n-2}(mod100) = 6^2S_{n-2} = 6^4S_{n-4}6^6S_{n-6} = 6^{100}S_{n-1008}$,
$S_{1008} = 6^{1008}S_0 = 6^{1008} \cdot 2 = 2^{253}(mod100)$
$6^4 = 1296 \equiv -4(mod100), 2^{22} \equiv 2^2(mod100), 2^{12} \equiv -4(mod100)$
$2^{253}(2^{22})^{11} \cdot 2^{11} \equiv 2^{22} \cdot 2^{11} = 2^{33} = (2^{12})^2 \cdot 2^9 \equiv 2^4 \cdot 2^9 = 2^{12} \cdot 2 = -8 \equiv 92$
$[\alpha^{2016}] = [a^{1008}] = [S_{1008} - b^{1008}] = S_{1008} - 1 \equiv 92 - 1 = 91(mod100).$

▷ **7.** Построить такой треугольник ABC с целочисленными сторонами, углы которого удовлетворяют соотношению:

$$3\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{3A}{2} \cdot \sin\frac{3B}{2} \cdot \cos\frac{3C}{2} = 0.$$

Решение.
Имеем:

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

и

$$\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos\frac{3}{2}(A+B)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)-\sin\frac{3}{2}C\right)$$

Будем теперь преобразовывать левую часть данного в условии задачи равенства :

$3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2}=\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+$ $+\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\cos\frac{3C}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}C\cdot\cos\frac{3}{2}C=\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{(A+B)}{2}-\frac{3}{4}\sin C-$ $\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{3}{2}(A+B)+\frac{1}{4}\sin 3C=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B)-\frac{3}{4}\sin C-\frac{1}{4}(\sin 3A+$ $\sin 3B)+\frac{1}{4}\sin 3C.$

Итак, углы треугольника связаны зависимостью

$$3\sin A+3\sin B-3\sin C-\sin 3A-\sin 3B+\sin 3C=0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом :

$$3(\sin A+\sin B-\sin C)+(\sin A-\sin 3A)+(\sin B-\sin 3B)-(\sin C-\sin 3C).$$

Далее:

$$2(\sin A+\sin B-\sin C)-2\cos 2A\cdot\sin A-2cos2B\cdot\sin B+2\cos 2C\cdot\sin C=0$$

и

$$\sin A(1-\cos 2A)+\sin B(1-\cos 2B)=\sin C(1-\cos 2C).$$

Это дает нам:

$$\sin^3 A+\sin^3 B=\sin^3 C.$$

Так как

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

то искомое соотношение между сторонами треугольника имеет вид :

$$a^3+b^3=c^3,$$

т. е. по теореме Ферма таких треугольников не существует.

▷ **8.** Сколько существует натуральных пар чисел $(m;k)$, таких, что последовательность чисел, заданных рекурсивным соотношением

$$x_{n+2}+\frac{1}{x_{n+1}}=x_n, x_1=m, x_2=k$$

состоит ровно из 100 чисел.

Решение.

$x_{n+1}\neq 0$

$x_{n+2}x_{n+1}-x_{n+1}x_n=-1$, где $x_{n+2}x_{n+1}=a_{n+1}$ и $x_{n+1}x_n=a_n$

$a_1=x_1\cdot x_2=m\cdot k;$

$a_{n+1}=a_1+dn=mk-n$

$a_{n+1}=x_{n+2}\cdot x_{n+1}=0\Rightarrow x_{n+2}=0$

$n=mk\Rightarrow x_{n+2}=0$ и $\exists x_k:\forall k>n+2$

$x_1,x_2,x_3,\dots,x_{mk+2}.$

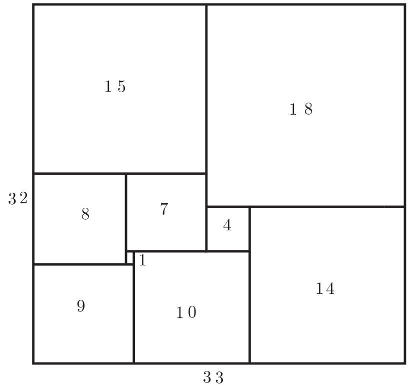
$m\cdot k+2=100$, т.е. $m\cdot k=98.$

m	1	2	7	14	49	98
k	98	49	14	7	2	1

Ответ : 6 пар.

▷ **9.** Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на конечное число попарно неравных квадратов?

Решение.



▷ **10.** Найдите все натуральные a, при которых неравенство

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}\leq\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

имеет ровно а) 2016 целых решений, б) 2017 целых решений.

Решение.

$a\neq 1, a\geq 2, a\in N$. Многочлен 6 степени. следовательно, 6 корней.

Если $x=a$ —корень, то корни $x_2=1-a$, $x_3=\frac{1}{a}$, , $x_5=\frac{1}{1-a}$, $x_6=\frac{a}{a-1}$.

1) $a=2$.

$x_1=2, x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}, x_4=\frac{1}{2}, x_5=-1, x_6=2.$

$(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2\leq 0$

3 решения {-1 ; $\frac{1}{2}$ 2}.

2) $a\geq 3$

$\frac{a}{a-1}=x_6\leq x\leq x_1=a,$

$\frac{1}{a}=x_3\leq x\leq x_4=1-\frac{1}{a},$

$1-a=x_2\leq x\leq x_5=\frac{1}{1-a},$

$a\geq 3, \frac{1}{a}\leq\frac{1}{3}$

$-a\leq -3, 1-a\leq -2$

$0>-\frac{1}{a}\geq-\frac{1}{3}, 1>x_4\geq\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1-a}<0$

$\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}=1-\frac{1}{1-a}$

$x_1\geq 3, x_2\leq -2, x_3\in(0;\frac{1}{3}]$

$x_4 \in [\frac{2}{3}; 1)$
$x_5 \in [-\frac{1}{2}; 0)$
$x_6 \in (1; \frac{3}{2}]$
$\{2, 3, \ldots, a\}$ $(a-1)$ решение
$\{-1 - 2 \ldots a - (a-1)\}$ $(a-1)$ решение
Всего целых решений $2a - 2$:
а)$2a - 2 = 2016$, $a = 1009$.
б)$2a - 2 = 2017$, $a \notin \varnothing$.