10 класс. Решение задач.

▷ **1.** Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x}.$$

Решение.

В силу неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ имеем

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x}2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}} =$$
$$= 2\sqrt{2^{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)}} = 2\sqrt{2^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}} \geq 2\sqrt{2^{\sqrt{2}(-1)}} =$$
$$= 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Достигается при

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1;$$
$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$
$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ : $2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

▷ **2.** У Сережи больше 50 черных и белых шаров, причем белых больше, чем черных. Оказалось,что он может выложить шары 2016 способами в ряд так, что никакие два черных не лежали рядом. Сколько шаров было у Сергея?

Решение.

Пусть p — количество белых, а q — черных. $N = C_{p+1}^{q}$ — количество мест, на которые можно выложить черные шары.

$p > q$;

$p + q > 2q$;

$2p > p + q > 50$;

$$C_{n+1}^{m} = \frac{(n+1)!}{m!(m-n+1)!};$$
$$C_{n}^{m} = \frac{n!}{m!(m-n)!};$$
$$\frac{(n+1)!}{m!(m-n+1)!} > \frac{n!}{m!(m-n)!};$$

$n + 1 > m - n + 1$;

$2n > m$;

$$C_{n}^{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(m-n+1)!};$$
$$C_{n}^{m} = \frac{n!}{m!(m-n)!}$$
$$\frac{n!}{(m+1)!(m-n+1)!} > \frac{n!}{m!(m-n)!};$$

$m - n > m$, т. е. $2m > n$;

$$C_N^2 = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2};$$
$$\frac{p(p+1)}{2} = 2016 = 32 \cdot 63;$$

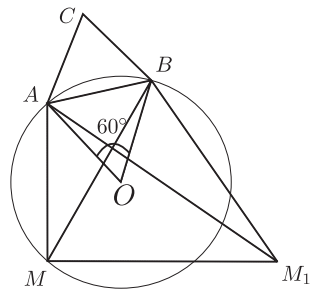
$p(p + 1) = 64 \cdot 63$;

Получаем, что $p = 63$; $q = 62$, всего $62 + 63 = 125$ шаров.

Ответ : 125 шаров.

▷ **3.** Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, для которых $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

Решение.



Пусть точка M взята в плоскости треугольника ABC так, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2$$

На отрезке MB построим равносторонний треугольник BMM_1.

Треугольник MBC равен треугольника M_1BA так как $BC = BA$, $BM = BM_1$ и $\angle MBC = \angle M_1BA$. Следовательно. $M_1A = MC$. Так как $MM_1 = MB$, то $MC^2 = MA^2 + MB^2 = MA^2 + MM_1^2$ и треугольник AMM_1 — прямоугольный. Отсюда следует, что $\angle AMB = 30°$.

Итак, если точка обладает указанным в условии задачи свойством и находится вне треугольника ABC, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и вмещающего угол в $30°$.

Совершенно таким же путем доказывается, что если точка M лежит внутри треугольника и обладает указанным свойством, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и имеющего угол в $150°$.

Допустим теперь, что точка M принадлежит одной из упомянутых дуг, например внешней по отношению к треугольнику ABC. Надо доказать, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2$$

Произведя то же построение, что и выше, мы получим треугольник AMM_1б у которого угол AMM_1 — прямой, ибо

$$\angle AMM_1 = \angle AMB + \angle BMM_1 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Так как

$$MM_1 = MB$$

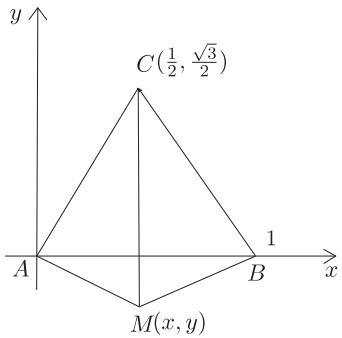
и

$$AM_1 = CM,$$

то

$$CM = AM_1^2 = AM + MM_1^2 = AM^2 + MB^2.$$

Итак, искомым геометрическим местом является окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, причем ее центром служит точка , симметричная вершине относительно прямой AB (концы также принадлежат искомому геометрическом месту).



Совсем просто задача решается с помощью метода координат. Примем вершину A за начало прямоугольной системы координат, а вершину B — за единичную точку оси OX. направление оси OY выберем так, чтобы вершина C находилась в первом квадранте. Тогда ее координатами будут служить числа $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Пусть точка $M(x, y)$ j,обладает указанным в задаче свойством.

$$MC = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$MA = \sqrt{x^2 + y^2}, MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ и $MC^3 = MA^2 + MB^2$.

Следовательно, $x^2 + y^3 - x + \sqrt{3} \cdot y + \frac{1}{4} = 0$, или $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Таким образом, мы получили ту же окружность, о которой шла речь выше.

▷ **4.** Внутренние углы A_1, A_2, ..., A_{2016} выпуклого 2016-угольника A_1, A_2, ...,A_{2016} образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Можно ли описать окружность вокруг этого многоугольника?

Решение.

Нельзя. Допустим,что можно. Обозначим через α_1, α_2, ...,α_{2n-1} — хорды,соединяющие соседние вершины, тогда

$$\angle A_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}),$$

$$\angle A_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$$

$$\ldots$$

$$\angle A_{2n} = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}).$$

Сложим все четные и все нечетные

$$A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n-1} = \frac{1}{2}((n-2)\alpha_1 + (n-2)\alpha_3 + \cdots + (n-2)\alpha_{2n-1})$$

$$A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n} = \frac{1}{2}((n-2)\alpha_1 + (n-2)\alpha_3 + \cdots + (n-2)\alpha_{2n-1}),$$

следовательно, равны, но так как возрастающая арифметическая прогрессия, то $A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n-1} < A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n}$ — противоречие.

▷ **5.** Пусть $\mathrm{P}(N)$ — произведение цифр натурального числа N. Сколько существует семерок последовательных четырехзначных натуральных чисел $(M, M+1, M+2, M+3, \ldots, M+6)$, в записи которых нет ни одного нуля таких, что $\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(M+1) + \cdots + \mathrm{P}(M+6) = 2016$.

Решение.

$M_k = \overline{xyzn_k}$; $n_{k+1} = n_k + 1$;

$\mathrm{P}(M_k) = x \cdot y \cdot z \cdot n_k$;

$2016 = xyz(n_1 + n_2 + \cdots + n_7) = x \cdot y \cdot z \cdot S$;

1)

$$\begin{cases} n_1 = 1; \\ n_7 = 7; \end{cases}$$

S= 28.

$2016 = 28 \cdot xyz$;

$xyz = 2^3 \cdot 3^2$;

$x = \overline{1,9}$; $y = \overline{1,9}$; $z = \overline{1,9}$

x	1	2	2	3	4
y	8	4	6	8	6
z	9	9	6	3	3
n	6	6	3	3	6

$n = 24$;

2)

$$\begin{cases} n_1 = 2; \\ n_7 = 8; \end{cases}$$

$S = 35$, 2016 не делится на 35, следовательно решений нет.

3)

$$\begin{cases} n_1 = 3; \\ n_7 = 9; \end{cases}$$

S= 42;

$xyz = 24$;

x	1	1	2	2
y	3	4	2	4
z	8	6	6	3
n	6	6	3	6

$n = 21$;

Всего : $21 + 24 = 45$ различных семерок натуральных чисел.

Ответ : 45.

▷ **6.** На отрезке [0,4] числовой оси расположены 63 различные точки a_k $k = \overline{1, 63}$. Докажите,что на этом отрезке найдется такая точка x, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|x - a_1|} + \frac{1}{|x - a_2|} + \cdots + \frac{1}{|x - a_{63}|} < 2016.$$

Решение.

Пусть $a_k < a_{k+1}$ (без ограничения общности). Найдется, по крайней мере, один отрезок $[a_m; a_{m+1}]$, длина которого больше $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$ (количество отрезков 64). Не трудно доказать методом от противного. В качестве x возьмем середину этого отрезка

$$x = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}.$$

$$|x - a_m| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32}$$

$$|x - a_{m+1}| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32}$$

$$|x - a_k| = \frac{1}{2}|a_m + a_{m+1} - 2a_k| = \frac{1}{2}(a_k - a_{m+1}) + \frac{1}{2}(a_k - a_m) > \frac{1}{32};$$

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_63} < 32 \cdot 64 = 2016.$$

▷ **7.** Пусть

$$f_1(x) = f(x), f_k(x) = f[f_{k-1}(x)].$$

Существует ли функция $f(x)$, отличная от нуля, такая, что выполняется тождество

$$f_1() + f_2(x) + \cdots + f_{2015}(x) = f_{2016}(x).$$

Решение.

Пусть $f(x) : f(x) = kx, f_2(x) = kf(x) = k^2x \Longrightarrow f_n(x) = k^nx$.

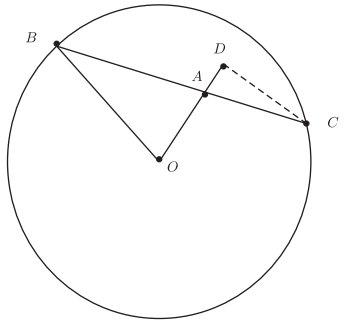
$kx + k^2x + \cdots + k^{2015}x = k^{2016}x$.

Пусть $g(0) = -1$, тогда $g(k) = k^{2015} - \frac{k^{2015}-1}{k-1}$, f $g(2) = 1$, следовательно существует $k_0 \in (0; 1) : g(k_0) = 0$.

$$f(x) = k_0x.$$

▷ **8.** Через точку , лежащую внутри данного круга, провести хорду так, чтобы она разделилась в точке A в данном отношении $m : n$.

Решение.



Пусть BC — искомая хорда. Проведем из точки C прямую, параллельную радиусу OB, до пересечения в точке D с продолжением отрезка OA. Из подобия треугольников BAO и DAC имеем:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{DC}{OB} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Отсюда:

$$AD = \frac{OA \cdot m}{n}, DC = \frac{OB \cdot m}{n}.$$

Но OA и OB — данные отрезки. Следовательно, отрезки AD и DC мы можем построить. Отсюда вытекает решение задачи.

1) Находим отрезок AD и откладываем его на продолжении OA.

2) Находим отрезок DC и из точки D описываем радиус DC окружность, вообще говоря, в двух точках C_1 и C_3.

3) Соединив C_1 и C_2 с A и продолжив C_1A и C_2A до пересечения с окружностью в точках B_1 и B_2 получим две хорды: B_1C_1 и B_2C_2, дающие решение задачи.

▷ **9.** Найдите все значения m, при которых уравнение

$$2\sin x + m = \cos x + 2m \operatorname{tg} x$$

имеет два решения, таких,что $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$\cos x \neq 0$;

$$\cos x(2\operatorname{tg} x - 1) = m(2\operatorname{tg} x - 1);$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2};$$

$$\cos x = m, -1 \leq m \leq 0;$$

$$x = \pm \operatorname{arctg} m + 2\pi n, |x| \geq \frac{\pi}{2};$$

$$\cos x = m, 1 > m > 0;$$

$$x = \pm \arccos m;$$

Если $m = 1$б то $x = 0$ и $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$;
Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} m = \arccos m$, тогда

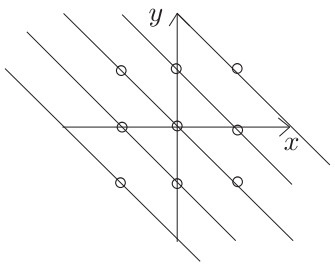
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $m = 1, \frac{2}{\sqrt{5}}$.

▷ **10.** Пусть [a]— целая часть числа (наибольшее целое число,не превосходящее), $\{a\}$— дробная часть числа , где $\{a\} = a - [a]$.Выяснить, сколько решений имеет система:

$$\begin{cases} ([|x|] + |y|)([|y-2|] + |x|)(|x^2 - 4| + |y - 3|)(x^2 + y^2 - 2y - 15) = 0; \\ \{x\} + \{y\} = 1. \end{cases}$$

Решение.
$\{x\} + \{y\} = 1$



1) $[|x|] + |y| = 0$
$y = 0, -1 < x < 1$
2) $[|y-2|] + |x| = 0$
$x = 0, 1 < y < 3$
3)

$$\begin{cases} x = \pm 2; \\ y = 3; \end{cases}$$

4) $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$
$x + y = m$
$x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$
$m^2 - 2my + 2y^2 - 2y - 15 = 0$
$2y^2 - 2(m+1)y + m^2 - 15 = 0$
$(m+1)^2 - 2m^2 + 30 < 0$
$-m^2 + 2m + 31 < 0$
$m^2 - 2m - 31 > 0$
$m > 1 + \sqrt{1 + 31} = 1 + 4\sqrt{2}$
$m < 1 - \sqrt{32}$