XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015. Если возможно, укажите наименьшее такое число.

▷ **2.** С помощью любых математических действий и минимального количества единиц представьте число 2015.

▷ **3.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x + f(y)) + g(y + f(x)) \leq 10$?

▷ **4.** По крайней мере три из заданных четырех точек, являющихся серединами сторон некоторого четырехугольника, находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

▷ **5.** Заданы две последовательности $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}, a_0 = \frac{1}{2}$; и $b_{n+1} = b_n^2 - - 2b_n + 2, b_0 = 4$. Доказать,что для всех натуральных n справедливо соотношение

$$a_n b_n = 2b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

▷ **6.** Сколько существует различных несократимых дробей a со знаменателем 2015, при которых уравнение имеет решение

$$arcsin^3 x + arccos^3 x = \pi^3 a$$

▷ **7.** Каждая из 33 прямых разбивает правильный восьмиугольник на два шестиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере пять из этих прямых проходят через одну точку.

▷ **8.** В коробке лежит 2015 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в ней спичек. Из двух игроков проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выигрывает при правильной игре?

▷ **9.** От каждой вершины единичного куба отпиливают на расстоянии h от каждой вершины, перпендикулярно диагонали куба, проходящей через эту вершину, треугольные пирамиды, так, что в полученный многогранник можно вписать шар. Какие значения может принимать объем этого многогранника?

▷ **10.** Пусть $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2015}$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением S, если известно, что выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \ldots + 2x_{2014}^2 + x_{2015}^2 + 2x_1 + 2014 \leq \\ \leq 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{2014}x_{2015}) + 2x_{2015}, \\ (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 2)^4 + (x_3 - 3)^4 + \ldots + (x_{2015} - 2015)^4 = 32240. \end{cases}$$