

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

11 класс

▷ 1. Ученик нарисовал треугольник с углами $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\alpha\gamma}$, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α , β , γ .

▷ 2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

▷ 3. Найдите все целые решения неравенства

$$2(x^2 + x) \sin 2x + (2x + 2 - x^3) \cos 2x \leq x^3 + 2x + 2.$$

▷ 4. Пусть x, y, z - корни уравнения $t^3 - 3t^2 - 2010t + 2012 = 0$. Чему равно выражение $A = ||x - y| + x + y - 2z| + |x - y| + x + y + 2z$.

▷ 5. Паук ползет поочередно по внешней и внутренней частям цилиндрической поверхности. Пусть M - точка из которой Паук начинает свое движение (см. обратную сторону, рис.1), R - радиус основания цилиндра, h - высота цилиндра. Найти наименьшее расстояние, которое должен проползти Паук, чтобы вернуться в точку M , если известно что на нижнем основании он побывал в 2012 различных точках.

▷ 6. На плоскости дано множество отрезков LR , где $L(-\frac{1}{\sqrt{p}}; \frac{1}{p})$, $R(\sqrt{p}; p)$ и параметр $p \in [0, 25; 4]$. Найдите площадь наименьшей фигуры, содержащей внутри себя все эти отрезки.

▷ 7. Найти наибольшее значение выражения $\frac{x}{4023 + y^{2011}} + \frac{y}{4023 + x^{2011}}$ при $x, y \in [0; 1]$.

▷ 8. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a, b . Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника.

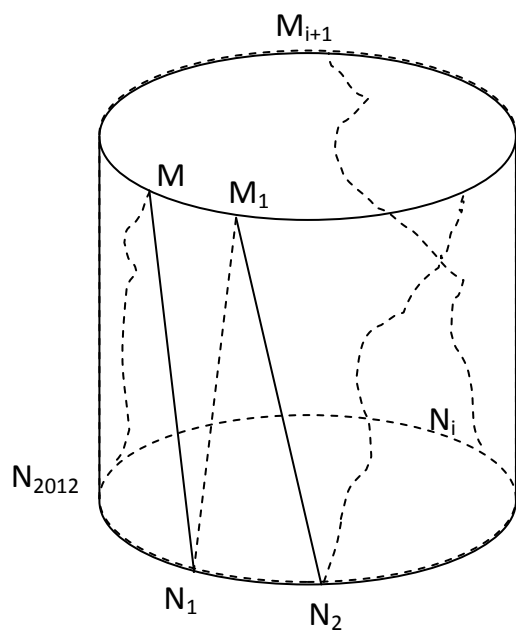
▷ 9. С помощью циркуля и линейки по заданному периметру и углу α построить треугольник, равновеликий данному квадрату.

▷ 10. Куб без полостей составлен из трех равновеликих частей. Четыре боковые грани куба имеют вид (см. обратная сторона, рис.2). Видимая часть боковой грани среднего тела - невыпуклый шестиугольник. Найдите все возможные значения радиуса цилиндрического отверстия, перпендикулярного верхней и нижней граням куба, не задевающего среднего тела. Известно, что $AB = a$, $PP_1 = QQ_1 = \frac{3}{8}a$, $NN_1 = \frac{4}{7}a$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

Задача 5.

Рис. 1.



Задача 10.

Рис. 2.

