



## XX Межрегиональная олимпиада

### школьников по математике

#### «САММАТ-2012»

#### Заключительный тур

#### 11 класс

▷ 1. Ученик нарисовал треугольник с углами  $\sqrt{\alpha\beta}$ ,  $\sqrt{\beta\gamma}$ ,  $\sqrt{\alpha\gamma}$ , другой ученик нарисовал треугольник с углами  $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ,  $\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ ,  $\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$  градусов. Найдите  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

▷ 2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

▷ 3. Найдите все целые решения неравенства

$$2(x^2 + x) \sin 2x + (2x + 2 - x^3) \cos 2x \leq x^3 + 2x + 2.$$

▷ 4. Пусть  $x, y, z$  - корни уравнения  $t^3 - 3t^2 - 2010t + 2012 = 0$ . Чему равно выражение  $A = ||x - y| + x + y - 2z| + |x - y| + x + y + 2z$ .

▷ 5. Паук ползет поочередно по внешней и внутренней частям цилиндрической поверхности. Пусть  $M$  - точка из которой Паук начинает свое движение (см. обратную сторону, рис.1),  $R$  - радиус основания цилиндра,  $h$  - высота цилиндра. Найти наименьшее расстояние, которое должен проползти Паук, чтобы вернуться в точку  $M$ , если известно что на нижнем основании он побывал в 2012 различных точках.

▷ 6. На плоскости дано множество отрезков  $LR$ , где  $L(-\frac{1}{\sqrt{p}}; \frac{1}{p})$ ,  $R(\sqrt{p}; p)$  и параметр  $p \in [0, 25; 4]$ . Найдите площадь наименьшей фигуры, содержащей внутри себя все эти отрезки.

▷ 7. Найти наибольшее значение выражения  $\frac{x}{4023 + y^{2011}} + \frac{y}{4023 + x^{2011}}$  при  $x, y \in [0; 1]$ .

▷ 8. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны  $a, b$ . Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника.

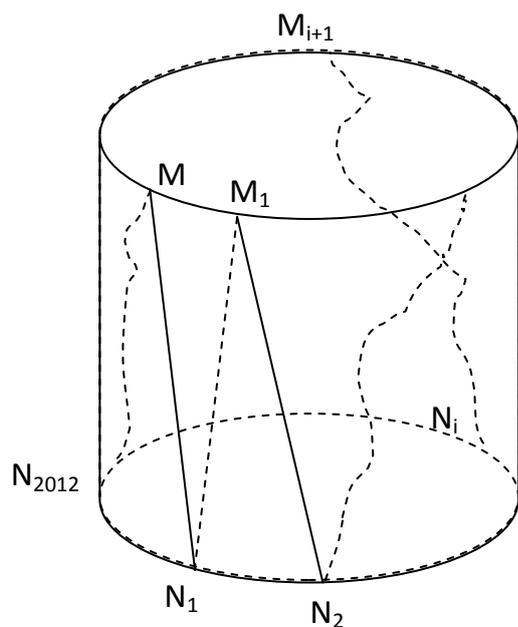
▷ 9. С помощью циркуля и линейки по заданному периметру и углу  $\alpha$  построить треугольник, равновеликий данному квадрату.

▷ 10. Куб без полостей составлен из трех равновеликих частей. Четыре боковые грани куба имеют вид (см. обратная сторона, рис.2). Видимая часть боковой грани среднего тела - невыпуклый шестиугольник. Найдите все возможные значения радиуса цилиндрического отверстия, перпендикулярного верхней и нижней граням куба, не задевающего среднего тела. Известно, что  $AB = a$ ,  $PP_1 = QQ_1 = \frac{3}{8}a$ ,  $NN_1 = \frac{4}{7}a$ .

**ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!**

**Задача 5.**

**Рис. 1.**



**Задача 10.**

**Рис. 2.**

