XX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2012»

11 класс

$\triangleright$ **1. Дворянинов С.В.** Ученик нарисовал треугольник с углами $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\alpha\gamma}$, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

Ответ: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

$\triangleright$ **2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{m}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{k}. \end{cases}$

Решение. Исходную систему можно записать:
$\begin{cases} m(x+y+z)=xy+xz, \\ n(x+y+z)=xy+yz, \\ k(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$

Поделим (1) уравнение на (2) и (1) уравнение на (3), получим: $\begin{cases} \frac{xy+xz}{xy+yz}=\frac{m}{n}, \\ \frac{xy+xz}{xz+yz}=\frac{m}{k}, \end{cases}$

$\begin{cases} n(xy+xz)=m(xy+yz), \\ k(xy+xz)=m(xz+yz), \end{cases}$ $\begin{cases} (n-m)xy+nxz=myz, \\ kxy+(k-m)xz=myz, \end{cases}$

Тогда $x=\frac{n+m-k}{k+n-m}z$, $y=\frac{k-m-n}{n-m-k}z$, подставляя x, y в одно из уравнений получаем, что

$$z=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(k-n-m)}.$$

$$y=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(n-m-k)},$$

$$z=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(m-n-k)}.$$

$\triangleright$ **3.** Найдите все целые решения неравенства

$$2(x^2+x)\sin 2x+(2x+2-x^3)\cos 2x\le x^3+2x+2.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$a\sin x+b\cos x=C\sin(x+t),$$

где $C=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad t=arcsin\frac{b}{c}$.

Исходное неравенство можно записать

$$\sin(2x+t)\le\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}.$$

Тогда возможны три случая:

1. $\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}<-1$, следовательно, $x^3+2x+2<0$. Решая это неравенство получаем, что при $x<-1$ решений неравенство не имеет.

2. $|\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}|\le 1$. Данное неравенство может иметь три целочисленных решения: -1; 0; 1. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x=0$, $x=1$ исходное неравенство верно.

3. $\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}>1, x^3+2x+2>0$. Данные условия выполнены при $x>1$.

Ответ: $N\cup 0$.

$\triangleright$ **4.** Пусть x,y,z - корни уравнения $t^3-3t^2-2010t+2012=0$. Чему равно выражение $A=||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z$.

Решение. Заметим, что $A=4\max\{x,y,z\}$. Корнями уравнения $t^3-3t^2-2010t+2012=0$ являются числа $1,1+\sqrt{2013},1-\sqrt{2013}$. Тогда получаем, что $A=4(1+\sqrt{2013})$.

$\triangleright$ **5.** Паук ползет поочередно по внешней и внутреней частям цилиндрической поверхности. Пусть M - точка из которой Паук начинает свое движение (см.обратную сторону, рис.1), R - радиус основания цилиндра, h - высота цилиндрра. Найти наименьшее расстояние, которое должен проползти Паук чтобы вернуться в точку M, если известно что на нижнем основании он побывал 2012 раз.

Указание. Рассмотреть развертку цилиндра.

Ответ: $d=\sqrt{4\pi^2r^2+(4024h)^2}$.

$\triangleright$ **6. Дворянинов С.В.** На плоскасти дано множество отрезков LR, где $L(-\dfrac{1}{\sqrt{p}}; \dfrac{1}{p})$, $R(\sqrt{p}; p)$ и параметр $p \in [0,25; 4]$. Найдите площадь наименьшей фигуры, содержащей внутри себя все эти отрезки.

Решение. Легко заметить, что все точки L и R лежат на параболе $y = x^2$. Рассмотрев несколько отрезков (например, $p = 0,25; 1; 4$), можно предположить, что все эти отрезки пересекаются в одной точке на оси OY. Для доказательства этого рассмотрим уравнение прямой, проходящей через точки L и R :

$$y = \frac{p-1}{\sqrt{p}}(x - \sqrt{p}) + p. \qquad (1)$$

При любом значении параметра и при $x = 0$ получаем $y = 1$. Это означает, что все отрезки проходят через точку $(0; 1)$. При изменении параметра эти отрезки поварачиваются вокруг этой точки, меняя свою длину. Эти отрезки заметают два равных криволинейных треугольника. Правый треугольник ограничен параболой $y = x^2$ и двумя прямыми линиями, получаемыми из уравнения (1) при $p = 0,25$ и $p = 4$. Это соответственно прямые линии

$$y = -\frac{3}{2}x + 1, y = \frac{3}{2}x + 1.$$

Первая прямая пересекает параболу (для правого треугольника) в точке $R(0,5; 0,25)$, вторая - в точке $R(2; 4)$.

Площадь правого треугольника выражается суммой двух интегралов

$$\int_0^{0,5} \left(\left(\frac{3}{2}x + 1 \right) - \left(-\frac{3}{2}x + 1 \right) \right) dx + \int_{0,5}^{2} \left(\left(\frac{3}{2}x + 1 \right) - x^2 \right) dx = 2\frac{1}{16}.$$

Ответ: $4\frac{1}{8}$.

$\triangleright$ **7.** Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{4023 + y^{2011}} + \dfrac{y}{4023 + x^{2011}}$ при $x, y \in [0; 1]$.

Решение. Воспользуемся неравенством $x^{2011} - 2012x + 2012 \geq 0$ при $x, y \in [0; 1]$. Тогда $x^{2011} - 2012x + 2011 + y^{2011} - 2012y + 2011 \geq 0$, $2012(x + y) \leq 4022 + x^{2011} + y^{2011}$.

Значит, $\dfrac{x}{4023 + y^{2011}} + \dfrac{y}{4023 + x^{2011}} \leq \dfrac{x}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} + \dfrac{y}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} =$
$= \dfrac{x + y}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} \leq \dfrac{1}{2012}$.

Ответ: $\frac{1}{2012}$.

$\triangleright$ **8.** В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a, b. Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника.

Указани к решению. Рассмотрим трехмерную систему координат и точки с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, z)$. Пусть вершины равностороннего треугольника заданы точками $(0, 0, 0)$, $(a, 0, v)$, $(0, b, u)$. По условию задачи получем, что $a^2 + v^2 = b^2 + u^2 = a^2 + b^2 + (v - u)^2$.

Расммотрим систему

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a^2 - b^2, \\ u^2 - (v - u)^2 = a^2. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе и введем замену $t = \frac{u}{v}$, получим уравнение вида

$$t^2 - 2\frac{a^2 - b^2}{a^2}t - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

Решая это квадратное уравнение находим t, подставляя его в одно из уравнений системы получаем уравнение относительно v.

$\triangleright$ **9.** С помощью циркуля и линейки по заданному периметру и углу α построить треугольник равновеликий данному квадрату.

$\triangleright$ **10.** Куб без полостей составлен из трех равновеликих частей. Четыре боковые грани куба имеют вид (см. обратная сторона, рис.2). Видимая часть боковой грани среднего тела – невыпуклый шестиугольник. Найдите все возможные значения радиуса цилиндрического отверстия, перпендикулярного верхней и нижней граням куба, не задевающего среднего тела. Известно, что $AB = a$, $PP_1 = QQ_1 = \frac{3}{8}a$, $NN_1 = \frac{4}{7}a$.

Решение. Объем одной части $V = \dfrac{a^3}{3}$, тогда высота частей равна $H = a$, а площадь $S = \dfrac{a^2}{3}$.

Пусть $NM = x$, тогда площадь трапеции $NMPQ$,

$$(x + \frac{a}{4}) \cdot \frac{2}{7}a = \frac{a^2}{6}, \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Основание данного цилиндра будет вписано в квадрат со стороной $\frac{\sqrt{2}a}{3}$, следовательно, радиус основания $\frac{\sqrt{2}a}{6}$.

Ответ: $R \in (0; \frac{\sqrt{2}a}{6})$).