XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

11 класс

Заключительный тур

► 1. ***Саушкин И.Н.*** Купил Роман раков, вчера - мелких, по цене 510 крон за штуку, а сегодня - по 990 крон, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 крон, из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 160 до 200 крон. Сколько Роман купил раков вчера и сколько сегодня, если крона - самая мелкая денежная единица?

► 2. ***Кузьмин Ю.Н.*** Решить систему уравнений

$$6x + 6y + 6z = 2xy + 2yz + 2zx + 14 = 3xyz + 18.$$

► 3. ***Лексина С.В.*** Докажите, что квадрат можно разрезать на 60 равных треугольников из которых можно сложить 10 квадратов.

► 4. ***Гусев А.А*** Пусть a действительная постоянная. Найдите все решения уравнения. При каких значениях параметра a уравнение четвертой степени

$$a^3x^4 + 2a^2x^2 + x + a + 1 = 0$$

имеет нечетное число действительных решений.

► 5. ***Лексина С.В.*** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стоящем на грани $ABCD$ даны две точки M на ребре AB, M_1 на ребре A_1B_1 такие, что $AM : MB = 3 : 2$, а $A_1M_1 : M_1B_1 = 2 : 3$. Муравей прополз по кратчайшему пути из точки M в точку M_1 так, что побывал на всех доступных гранях. Найти отношение скоростей муравья на горизонтальном участке и не на горизонтальных, если известно, что время проведенное им на горизинтальных участках равно времени проведенному им на не горизонтальных участках.

► 6. ***Козлова Е.*** Найти функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ удовлетворяющие уравнению

$$f(x + y) = g(x) + h(y) + xy(x + y + 2011)$$

и дифференцируемые в точке ноль.

► 7. ***Андреева Л.В.*** Брус размером $8 \times 27 \times 27$ распилить на 4 части, из которых можно сложить куб.

► 8. ***Андреев А.А.*** Докажите, что число 9000001999 является составным.

► 9. ***Дворянинов С.В.*** Дан прямоугольник со сторонами 28 см и 12 см. Существует ли треугольная пирамида, у которой все грани равные треугольники и длина каждого ребра выражается целым числом сантиметров и развертка которой совпадает с этим прямоугольником? Если да, то нарисуйте эту развертку и укажите длины всех ребер пирамиды.

► 10. ***Андреев А.А.*** Пусть $[x]$ - целая часть числа x - наибольшее целое число, непревосходящее x. Найдите наименьшее натуральное m, при котором найдется натуральное n, такое, что будет выполняться равенство

$$[\sqrt{m}] + [\sqrt{m+1}] + ... + [\sqrt{n}] = 2011.$$