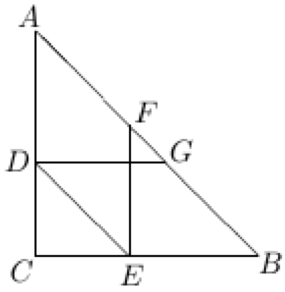
9-10 класс

1. Возведем равенство $a + h_a = b + h_b$ в квадрат. Так как $ah_a = bh_b$, то $a^2 + h_a{}^2 = b^2 + h_b{}^2$. Тогда $a^2 - h_b{}^2 = b^2 - h_a{}^2$, откуда следует равенство двух прямоугольных треугольников по катету и острому углу, а значит равны и гипотенузы этих треугольников, т.е. a=b.
2. Занумеруем дуги KM, ME, EF, FN, NP, PT, TS и SK цифрами 1, 2, …,7 и 8 соответственно. Тогда по условию: 2+6=4+8. Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности равен полуразности дуг, заключенных внутри угла. Тогда ∠A=0,5(2+3+4+5+6–8), □C=0,5(2+1+8+7+6–4), а значит сумма ∠A+∠C=0,5(1+2+3+4+5+6+ +7+8)=180°, т.е. четырехугольник ABCD – вписанный.
3. Т.к. MK и MP – биссектрисы, то ∠KMP=90°, а значит четырехугольник KCPM можно вписать в окружность. ∠CAB=70□ - внешний угол треугольника XKA, тогда ∠CAB=∠KXA+∠AKX, а значит ∠AKX=∠CKP=∠CMP=70°–25°=45°. Откуда следует, что угол между прямыми CM и AB равен 90°.
4. Так как CD и BE – биссектрисы, то точка D равноудалена от сторон AC и CB, а E равноудалена от сторон AB и CB. Опустим из точек E, P и D перпендикуляры на стороны



треугольника ABC. Пусть EM, PH и DN – перпендикуляры к стороне BC. Отрезок PH – средняя линия трапеции MEDN, тогда PH=0,5(EM+DN). Но расстояние от точки P до стороны CA равно 0,5DN, а расстояние от точки P до стороны AB равно 0,5EM, откуда и следует требуемое.

5. Пусть точки покрашены в красный, зелёный, синий и жёлтый цвета и утверждение задачи не выполнено. Расстояние между вершинами, конечно, больше $2-\sqrt{2}$. Поэтому все вершины крашены в разные цвета. Пусть, например, точка A красная, точка B зелёная, а точка C синяя. Отметим, как показано на чертеже точки D, E, F, G так, что AF=AD=BG=BE=$2-\sqrt{2}$. Отрезки AF и BG не пересекаются, поскольку AF+BG=$4-2\sqrt{2}<\sqrt{2}$. Имеем AF= $2-\sqrt{2}$<BF и отсюда CF>AF=$2-\sqrt{2}$. Значит точка F и, аналогично, точка G могут быть только жёлтыми. Но тогда точки D и E могут быть только синими, а расстояние между ними равно $\sqrt{2}\left(1-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)=2-\sqrt{2}$, и на расстоянии $2-\sqrt{2}$ найдутся две точки синего цвета.