

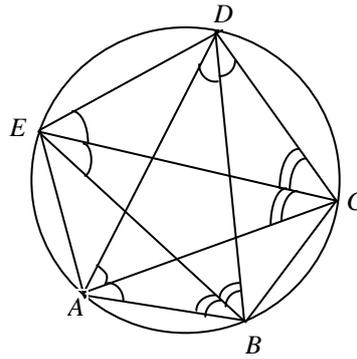
9 класс

- 1. Решение:** Нет, не могло. Обозначим через x число перекрашенных стеклянных чашек, а через y число перекрашенных фарфоровых чашек. Тогда белых осколков окажется $7(25-x)+8y=8(35-y)+7x$, что эквивалентно равенству $16y-14x=105$. Но при всех целых значениях неизвестного в левой части стоит чётное число, а в правой нечётное.
- 2.** Годится следующая последовательность:
2006, 2, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.
- 3. Решение:** Пусть (x, y) – координаты точки, через которую проходят все три прямые. Тогда имеем $ax+a^3=bx+b^3 \Leftrightarrow x(a-b)=- (a-b)(a^2+ab+b^2) \Leftrightarrow x=-(a^2+ab+b^2)$, поскольку числа a, b различные. Аналогично

$x = -(b^2 + bc + c^2)$ и $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 \Leftrightarrow (a - b - c)(a + b + c) = 0$.
 Поскольку числа a , b и c различны, $a + b + c = 0$.

$c)(a + b + c) = 0$.
 получаем

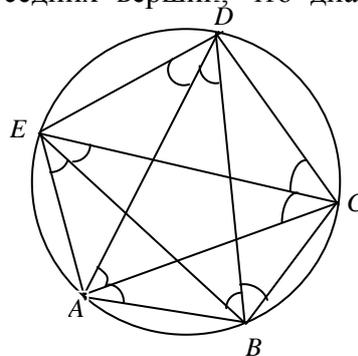
4. Решение: По условию в вершине каждого из диагоналей является биссектрисой стороны и другой диагональю. два случая: 1) в пятиугольнике есть две вершины такие, что диагонали-биссектрисы «смотрят друг на друга» и 2) вершин нет.



угла одна между соседними таких

Рассмотрим первый случай: пусть AC и BE – биссектрисы углов BAD и ABD соответственно. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle BAC = \angle BEC = \alpha$, $\angle CAD = \angle CED = \angle CBD = \alpha$, $\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE = \beta$, $\angle EBD = \angle ECD = \angle EAD = \beta$. При вершине D одна из диагоналей также является биссектрисой. Можем считать, например, что DB – биссектриса $\angle CDA$, но тогда $\angle CDB = \angle BDA = \alpha = \angle BCA = \angle BEA$. Тогда величины четырех углов пятиугольника, ограниченного диагоналями, равны $180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Пусть теперь в пятиугольнике нет соседних вершин, что диагонали-биссектрисы «смотрят друг на друга» и AC – угла BAD , тогда биссектрисами соответствующих углов являются BD , CE , DA и EB . Пусть $\alpha = \angle BAC = \angle BEC = \angle BDC$, но тогда $\angle CAD = \angle CBD = \angle CED = \alpha$, а значит $\angle EBD = \angle ECD = \angle EAD = \alpha$, $\angle ACE = \angle ABE = \angle ADE = \alpha$, $\angle BDA = \angle BCA = \angle BEA = \alpha$. Тогда все углы пятиугольника, ограниченного диагоналями, равны $180^\circ - 2\alpha$.



BE – биссектриса

диагонали

величины

5. Ответ: 5. Решение. Рассмотрим выражение $2x + y + z$, где x – число мер ртути, y – число мер серы, z – число мер кислоты. Проследим, как меняется значение этого выражения при каждой из трех алхимических операций: а) $2(x-1) + y + (z-1) + 3 = 2x + y + z$ (то же для серы); б) $2(x-1) + (y-1) + (z+1) = 2x + y + z - 2$; в) $2(x+1) + (y-1) + (z-1) = 2x + y + z$.

Как видим, величина эта величина при алхимических операциях остается прежней или уменьшается. Изначально она равна 40. Для получения t мер философского зелья требуется t мер ртути, $2t$ мер серы и $3t$ мер кислоты, и эта величина равна $7t \leq 40$. Значит, t не превосходит 5.

Пять мер философского зелья получить можно: 1. Соединим по 2 меры ртути и серы при высокой температуре, получим 2 меры кислоты (осталось 13 мер ртути и 8 мер серы). 2. Соединим при низкой температуре по 1 мере ртути и серы, получим 3 меры серы. 3. Соединим при низкой температуре по 2 меры ртути и кислоты, получим 6 мер кислоты (осталось по 10 мер ртути и серы). Повторим шаг 3 для 5 мер ртути и кислоты. Имеем 5 мер ртути, 10 мер серы и 16 мер кислоты.

6. Решение: выиграет Петя. Второе число он получает, дописав в конце 0. Теперь на доске записано 240. Далее, если Вася своим ходом превратил число A в число B , Петя снова превращает B в A . Это не противоречит правилам, поскольку число 240 делится на 4, 6, 8, 10, 12. Для получения 13-го числа Вася вынужден дописать в конец 5 (т.к. 204, 402 и 420 не делятся на 13), после чего Петя переставляет цифры и получает 2450 (которое, очевидно, делится на 14). Вася должен добиться делимости на 15, но это невозможно: сумма цифр числа 2450 не делится на 3, поэтому перестановка не поможет. Стирание последней цифры и дописывание нуля не меняют сумму цифр. Дописывание 5 также

приводит к числу, не делящемуся на 3. Дописывание другой цифры в конец приводит к числу, не делящемуся на 5.