

ВТОРОЙ (ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ) ЭТАП

8 класс

1. **Ответ:** Да, можно. **Решение.** Например, можно выложить вертикально в ряд 5 прямоугольников размерами $1,5 \times 3,5$. Или поставить вертикально 3 прямоугольника 3×2 , а под ними расположить горизонтально два таких же прямоугольника.
2. **Ответ:** 3. **Решение.** $\angle KCO = \angle BCO = \angle KOC$ (накрест лежащие углы). Поэтому $OK = OC$ и аналогично $BM = OM$. Тогда $AK + AM + KM = AK + KC + AM + BM = 3$.
3. **Ответ:** зарплата директора фирмы равна средней зарплате всех остальных сотрудников. **Решение.** Пусть в фирме «Рога» m сотрудников, в фирме «Копыта» n сотрудников, зарплаты директоров составляют x рублей, а средние зарплаты остальных сотрудников составляют y рублей. Тогда суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» составляет $y(m-1) + x$ рублей, а суммарная зарплата всех сотрудников фирмы «Копыта» составляет $x(n-1) + y$ рублей. Приравняв средние зарплаты всех сотрудников, получаем $\frac{y(m-1) + x}{m} = \frac{y(n-1) + x}{n}$.
После преобразований приходим к равенству $n(x-y) = m(x-y)$. По условию $n \neq m$, значит $x = y$.
4. **Ответ:** 6, 8 и 12. **Решение.** Легко видеть, что все три этих числа эlegantные. Пусть N – произвольное эlegantное число. У нечётного числа все делители нечётные, разности делителей чётные, а нечётное число делиться на чётное не может. Поэтому, $N = 2n$. Но тогда $2n$ делится на $n-2$, а значит и $4 = 2n - 2(n-2)$ делится на $n-2$. Значит, $n-2 = 4, 2, 1, -1$. Случай $n=1$ нужно исключить, поскольку число 2 не имеет собственных делителей.
5. **Ответ:** победит Вася. **Решение.** У Васи есть выигрышная стратегия, гарантирующая, что, по крайней мере, половина из всех пар соседей будет содержать разные числа. Васе достаточно поступить, например, так: в 2010-ю клетку никогда не ставить свою «2». Остальные 2008 клеток мысленно разобьем на 1004 пары. Пусть Вася каждым ходом ставит свое число в ту же пару, что и Петя. Либо в любую пару, где нет «2», в случае, если Петя походит в 2010-ю клетку (в 2010-ю обязательно походит только Петя). Покажем, что Вася всегда может делать такие ходы. Когда Петя ставит «1» в одну из клеток со 2-й по 2009-ю, то он ставит ее в «пустую пару». Если же Петя ставит «1» в 2010-ю клетку, то либо перед ходом Васи найдется «пустая пара», либо игра уже закончена. Тогда нетрудно увидеть, что как минимум 1005 пар соседних клеток в ленте будут содержать разные числа, а это как раз половина.