11 класс

1. **Решение**. Пусть оба числа отличны от нуля. Если они одного знака, из свойств показательной функции вытекает, что правая часть положительна. Если они разного знака, то правая часть отрицательна. В любом случае равенства нулю не получается.
2. **Решение**. Достаточно доказать, что средний угол больше 60 градусов. Тогда больший будет заведомо больше, а третий меньше этой величины. Пусть стороны треугольника *a–d, a, a+d*. Средний угол А лежит против стороны *a*. По теореме косинусов $\cos A=\frac{(a-d)^2+(a+d)^2-a^2}{2(a-d)(a+d)}=\frac{a^2+2d^2}{2(a^2-d^2)}$. При отбрасывании слагаемых, содержащих d^2, в числителе и знаменателе, дробь уменьшается. Поэтому cos A>1/2 и угол A<60°.
3. **Решение**. Нет, недостаточно. Представим два следующих расположения колоды карт. В одном сначала идут карты пиковой масти «по возрастанию» от шестёрки до туза. Затем в том же порядке идут карты бубновой масти, затем крестовой и, наконец, червовой. В другом наборе масти располагаются в обратном порядке: червовая – крестовая – бубновая – пиковая. При этом внутри масти сохраняется то же расположение по возрастанию достоинств. Ясно, что расстояния между картами одной масти или картами одного достоинства в двух колодах будет одинаковым. Но в первой колоде первая карта – шесть пик, а последняя – туз червей. А во второй колоде – шесть червей и туз пик.
4. **Решение**. Как ни странно, нельзя. Любой квадратный трёхчлен с красивым графиком имеет дискриминант 12. В самом деле, пусть график квадратного трёхчлена $y=ax^2+bx+c$ есть красивая парабола, а x_1 и x_2 – его больший и меньший корни. Тогда сторона соответствующего правильного треугольника есть $x_1-x_2=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$, а его высота есть $\left|y\left(\frac{-b}{2a}\right)\right|=\left|\frac{D}{4a}\right|$. Из равенства $\left|\frac{D}{4a}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ находим D=12.
5. **Решение**. Рассмотрим три пары прямых: N_1M_1 и N_2M_2, M_2P_2 и M_1P_1, N_2P_2 и N_1P_1. Ясно, что каждая из них есть либо пара скрещивающихся, либо пара параллельных прямых. Через любую пару скрещивающихся можно провести единственную пару параллельных плоскостей, причём расстояние между этими плоскостями равно расстоянию между прямыми. Если в какой-то паре прямые скрещиваются, то такими плоскостями окажутся плоскости противоположных граней куба. Но расстояние между противоположными гранями куба равно длине ребра куба. Тогда из условию задачи следует, что среди этих трёх пар не менее чем в двух парах прямые параллельны. Пусть, например $N_1M_1 \parallel N_2M_2$ и $M_2P_2 \parallel M_1P_1$. Тогда по признаку параллельности плоскостей параллельны плоскости $N_1M_1P_1$ и $N_2M_2P_2$. Но тогда

параллельны между собой и прямые N_2P_2 и N_1P_1. В противном случае получилось бы, что через пару скрещивающихся прямых N_2P_2 и N_1P_1 проходят две пары параллельных плоскостей. Одна из них – плоскости $N_1M_1P_1$ и $N_2M_2P_2$, другая – плоскости граней куба AA_1B_1 и CC_1D. А такое невозможно. Итак, все три пары состоят из параллельных прямых. Значит, прямые N_1N_2 и M_1M_2 лежат в одной плоскости и имеют общую точку X, прямые N_1N_2 и P_1P_2 лежат в одной плоскости и имеют общую точку Y и, наконец, прямые M_1M_2 и P_1P_2 лежат в одной плоскости и имеют общую точку Z. Но, если среди этих точек есть различные, то все три прямые лежат в одной плоскости, что неверно. Значит, все эти прямые проходят через одну точку.

6. **Решение**. При n=28. Если 8 ладей будут занимать одну из двух диагоналей, а Вася испортит все клетки под этой диагональю, то при любой другой расстановке ладей на неиспорченных клетках найдутся ладьи, бьющие друг друга. Пусть Вася закрасил 27 клеток или меньше. Покажем, что ладьи можно переставить так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. Рассмотрим произвольную пару клеток, занятых некоторыми ладьями A и B при первоначальной расстановке (всего таких пар $\frac{8\cdot 7}{2}=28$пар). Эти клетки находятся в разных строках и столбцах. Дополним их парой клеток так, чтобы получился прямоугольник со сторонами, параллельными краям доски. Переставим ладьи A и B в эти новые клетки. Ясно, что ладьи вновь не бьют друг друга, и единственное возможное препятствие заключается в том, что в каждой паре одна из добавленных клеток испорчена Васей. Но эти пары не могут иметь общих клеток, иначе соответствующие ладьи били бы друг друга. Значит, испорченных клеток должно быть, как минимум, 28.