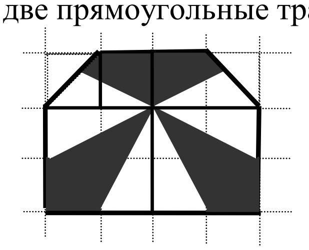
11 класс

1.Решение. (30+30)+30=90 (4 секунды), (30+30)+30=90 (4 секунды), 90+90=180 (2 секунды), 40+40=80 (2 секунды), 40+40=80 (2 секунды), 80+80=160 (2 секунды). После этого остаётся не более 18 секунд и следующий набор чисел: 180, 160, 320, 320, 320, 320, 320. Поступаем с ними так: 180+160+320+320=980 (9 секунд) и 320+320+320=960 (6 секунд). Наконец складываем 980 и 960 за 3 секунды и всё.

2. Ответ. Закрашенная больше. **Решение.** Разделим шестиугольник на четыре части: два квадрата и две прямоугольные трапеции (см. рисунок). Нетрудно доказать, что внутри квадратов площади закрашенной и незакрашенной частей равны. Рассмотрим теперь прямоугольные трапеции. Площадь каждой из них составляет полторы клетки. Разделим одну из этих трапеций на квадратик и треугольник (для второй – рассуждения аналогичны). Внутри квадратика закрашенная часть занимает ¾ клетки, а значит, ровно половину от площади всей прямоугольной трапеции. Но мы при этом не учли закрашенную часть внутри треугольника. Таким образом, закрашенная часть шестиугольника имеет большую площадь.



3. Док-во. Пусть (x,y) – координаты точки, через которую проходят все три прямые. Тогда $ax+a^3=bx+b^3 \Leftrightarrow x(a-b)=-(a-b)(a^2+ab+b^2) \Leftrightarrow x=-(a^2+ab+b^2)$, поскольку числа a, b различные. Аналогично $x=-(b^2+bc+c^2)$ и $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2 \Leftrightarrow (a-c)(a+b+c)=0$. Поскольку числа a, и c различны, получаем $a+b+c=0$.

4. Ответ: 50. Все члены последовательности кратны первому члену. Тогда первый член – делитель числа 275. Так как $a_1>1$, то a_1 не меньше пяти, сумма десяти первых членов не меньше, чем 5+10+15+…+50=275, а равенство возможно лишь в случае именно арифметической прогрессии 5, 10,15,…,50.

5. Ответ: $a=0$. **Решение**. При $a=0$ система неравенств принимает вид $y>-1$, $x>-1$, $x+y<0$. Это, очевидно возможно. Пусть $a>0$. Складывая два первых неравенства, получаем $(a+1)(x+y)>-2$. Но в силу второго неравенства $x+y<-a$. Т.к. $a>0$, получаем отсюда $(a+1)(x+y)<-a(a+1)$. Тогда $-2<-a(a+1)$, что эквивалентно $a\in(-2;1)$. Но в этом интервале нет положительных целых чисел.

6.Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. **Решение.** Так как все боковые ребра пирамиды образуют равные углы, то основание – вписанный многоугольник. Вписанный параллелограмм – прямоугольник. Пусть BC=2a, тогда AB=6a. Если O – точка пересечения диагоналей основания, то AO=$\sqrt{10}a$, SO=$\sqrt{30}a$, SA=$\sqrt{40}a$. Объем пирамиды SABC равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 6a\cdot\sqrt{30}a=2\sqrt{30}a^3$. Пусть AH – высота пирамиды SABC, опущенная из точки A. Площадь грани SABC равна $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{39}a=\sqrt{39}a^2$. Тогда, $AH=\frac{3V_{SABC}}{S_{SBC}}=\frac{3\cdot 2\sqrt{30}a^3}{\sqrt{39}a^2}=\frac{6\sqrt{10}a}{\sqrt{13}}$. Синус угла между ребром SA и плоскостью SBC равен $\frac{AH}{SA}=\frac{6\sqrt{10}a}{\sqrt{13}}:\left(\sqrt{40}a\right)=\frac{3}{\sqrt{13}}$.