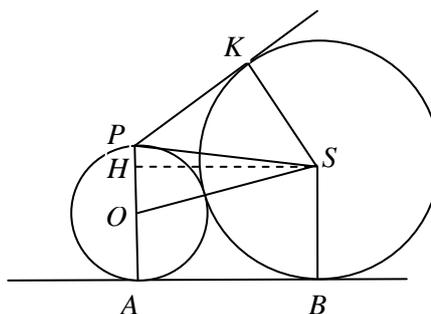


10 класс

1. Нет, не могло. Обозначим через x число перекрашенных стеклянных чашек, а через y число перекрашенных фарфоровых чашек. Тогда белых осколков окажется $7(25-x)+8y=8(35-y)+7x$, что эквивалентно равенству $16y-14x=105$. Но при всех целых значениях неизвестного в левой части стоит чётное число, а в правой нечётное.
2. Годится следующая последовательность: 2006, 2, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.
3. Пусть первая окружность имеет радиус R , а вторая окружность имеет радиус x ($x \neq R$).

Докажем, что длина касательной PK от x . Соединим центры окружностей: отрезка $OS = R + x$. Соединим точки P и S опустим перпендикуляр на PA . Из прямоугольной трапеции $OABS$ $AB = 2\sqrt{Rx}$. Рассмотрим треугольник PHS $PH = 2R - x$, $HS = AB = 2\sqrt{Rx}$.



не зависит
длина
и S , из точки

следует, что
 PHS :

Тогда по

теореме
Пифагора
 $PS^2 = (2R - x)^2 + 4Rx = 4R^2 + x^2$. Тогда

из

треугольника PKS следует, что $PK^2 = PS^2 - KS^2 = 4R^2 + x^2 - x^2 = 4R^2$, т.е. $PK = 2R$ (случай, когда первая и вторая окружности имеют равные радиусы, дает тот же результат).

4. **Ответ:** 1/2012, 0, 1. **Решение.** Будем называть множество чисел замкнутым, если произведение любых двух его элементов снова принадлежит этому множеству. При умножении любого числа на число, большее единицы по модулю, получаем число с большим модулем. Из этого следует, что конечное замкнутое множество не может содержать больше двух чисел с модулем, большим 1. По тем же соображениям конечное замкнутое множество не может содержать двух отличных от нуля чисел с модулем, меньшим 1. Тогда и -1 не может входить в наше множество, т.к. $2012 \cdot (-1) = -2012$. Значит, в нём содержатся числа 2012, x (из интервала $(-1; 1)$), 0, 1. Но тогда может выполняться только равенство $2012x = 1$ и $x = 1/2012$.

5. **Решение:** выиграет Петя. Второе число он получает, дописав в конце 4. Теперь на доске записано 24. Далее, если Вася своим ходом превратил число A в число B , Петя снова превращает B в A . Это не противоречит правилам, поскольку число 24 делится на 4, 6, 8. Чтобы число Васи делилось на 9, он должен дописать 3. Затем Петя добавляет 0. После этого Вася должен превратить 2430 в число, делящееся на 11. Признак делимости на 11 показывает, что перестановкой цифр или зачёркиванием этого добиться невозможно. Но добавлением цифры этого тоже не сделаешь, поскольку число 24300 при делении на 11 даёт остаток 1, и прибавлением цифры остаток 0 не получается.

6. **Ответ:** 12. **Решение.** Рассмотрим выражение $2x+y+z$, где x – число мер ртути, y – число мер серы, z – число мер кислоты. Легко видеть, что это выражение при каждой из двух алхимических операций не меняется: $2(x-1)+y+z+2=2x+y+z$; $2(x+1)+y-1+z-1=2x+y+z$. Изначально она равна 90. Для получения t мер философского зелья требуется t мер ртути, $2t$ мер серы и $3t$ мер кислоты, и эта величина равна $7t \leq 90$. Значит, t не превосходит 12. Двенадцать мер зелья получить можно: соединяя 20 мер серы и 20 мер кислоты, получим 20 мер ртути, 25 мер серы и 25 мер кислоты. Затем, соединяя 7 мер ртути и 7 мер кислоты, получаем 13 мер ртути, 25 мер серы и 39 мер кислоты. Этого хватит для приготовления 12 мер зелья.