Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2019-2020 учебном году
11 класс
Очный тур. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Два тела массой m и nm, соединенные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости. В начальный момент времени нить не провисает. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен μ. К левому телу приложена постоянная горизонтальная сила F, направленная налево. К правому телу приложена линейно возрастающая горизонтальная сила $F' = kt$, направленная направо. Найти скорость движения системы V в момент времени t_0. Постоянные величины имеют следующие значения: F = 4 Н, m = 1 кг, n = 2, μ = 0.1, k = 0.5 Н/с, g = 10 м/с^2, t_0 = 10 с.

Решение:

Состояние системы можно разделить на три этапа. Первый этап – движение налево до момента времени t_1, второй этап – система неподвижна, третий этап - движение направо с момента времени t_2.

Введем систему координат с осью X, направленной горизонтально. Запишем проекцию второго закона Ньютона на ось X.

1 этап.

$$F - T - \mu mg = ma$$
$$T - \mu nmg - kt = nma$$

В момент времени t_1 $\boldsymbol{a = 0}$.

$$t_1 = \big(F - \mu mg(n+1)\big)/k$$

3 этап.

$$-F + T - \mu mg = ma$$
$$-T - \mu nmg + kt = nma$$

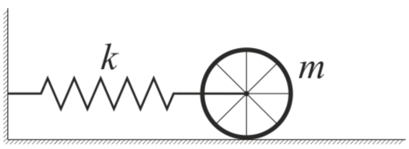
В момент времени t_2 $\boldsymbol{a = 0}$.

$$t_2 = \big(F + \mu mg(n+1)\big)/k$$

По условию задачи $\boldsymbol{t_1 = 2}$ с, $\boldsymbol{t_2 = 14}$ с. Следовательно, в момент времени t_0 $\boldsymbol{V = 0}$ м/с.

Ответ: $\boldsymbol{V = 0}$ м/с.

Задача 2. (20 баллов). На горизонтальной пружине с жесткостью k закреплено тонкое колесико, которое без проскальзывания может катиться по горизонтальной поверхности. Вся масса колесика m сосредоточена на его ободе, спицы невесомы. Определить частоту малых колебаний такой системы.



Решение:

Полная энергия системы складывается из энергии пружины, кинетической энергии поступательного движения колесика и энергии его вращательного движения. При движении без проскальзывания энергии поступательного и вращательного движения равны. Тогда полная энергия

$$E = \frac{2mV^2}{2} + k\frac{x^2}{2}$$

Сравнивая с энергией колебаний пружинного маятника

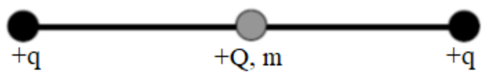
$$E_0 = \frac{mV^2}{2} + k\frac{x^2}{2}$$

замечаем, что при наличии колесика в уравнении используется удвоенная масса. Применяя известную формулу для частоты колебаний пружинного маятника, находим, что частота колебаний системы с колесиком будет равна:

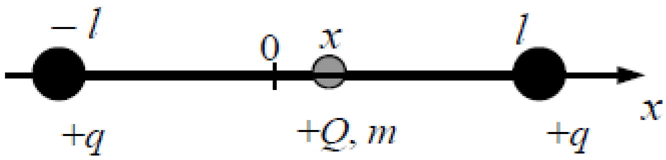
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

<u>Ответ:</u> $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$

Задача 3. (20 баллов). Бусинка с положительным зарядом Q>0 и массой m скользит по гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$.На концах направляющей находятся положительные зарядыq>0 (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T.Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 4 раза? Считать, что смещение бусинки относительно положения равновесия очень мало.



Решение:



При небольшом смещении бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$$F = \frac{kQq}{(l+x)^2} - \frac{kQq}{(l-x)^2} = kQq\frac{(l-x)^2-(l+x)^2}{(l+x)^2\,(l-x)^2} =$$

$$= -4lkQq\frac{x}{(l+x)^2\,(l-x)^2} = -4lkQq\frac{x}{[(l+x)(l-x)]^{\,2}} =$$

$$= -4lkQq\frac{x}{(l^2-x^2)^2} = -4lkQq\frac{x}{l^4\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^2}$$

Так как $|x| \ll l$, то $\left(l - \frac{x^2}{l^2}\right) \approx 1$, поэтому $F = -4lkQq\,\frac{x}{l^4} = -\frac{4kQq}{l^3}x$

Следовательно, сила пропорциональна смещению x. Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -\frac{4lkQq}{l^3}x$, пропорционально смещению.

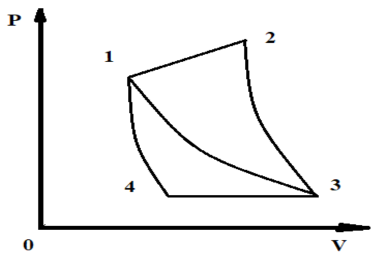
Известно из теории гармонических колебаний, если при движении тела для ускорения и координаты тела выполняется соотношение $a + \omega^2 x$=0, то координата меняется по закону гармонических колебаний $x = x_0\, cos\omega t$ и период равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Для бусинки $a + \frac{4kQq}{m\,l^3}x$=0. Это означает, что при малых отклонениях от положения равновесия бусинка совершает гармонические колебания, для которых $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{m\,l^3}}} = \pi\sqrt{\frac{m\,l^3}{kQq}}.$$

<u>Ответ:</u> Если заряд бусинки увеличить в 4 раза, период колебаний уменьшится в 2 раза.

Задача 4. (20 баллов). КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1), состоящего из процесса с линейной зависимостью давления от объема (1⟼2), адиабаты (2⟼3) и изотермы (3⟼1) равен η_1. КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1), состоящего из изотермы (1⟼3), изобары (3⟼4) и адиабаты (4⟼1) равен η_2. Чему равен КПД η цикла (1⟼2⟼3⟼4⟼1)? Рабочим веществом тепловой машины является идеальный газ. Циклы показаны на рисунке.



Решение:

КПД цикла (1⟼2⟼3⟼1) по определению равен $\eta_1 = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}}$.

КПД цикла (1⟼3⟼4⟼1) по определению равен $\eta_2 = \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}}$.

Здесь и далее $Q_{i,j} = Q_{j.i} \ \geq 0$.

КПД искомого цикла (1⟼2⟼3⟼4) по определению равен $\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}}$.

Преобразуем последнее выражение к ответу

$$\eta = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \frac{Q_{1,2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \eta_1 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_2 + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =.$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} + \frac{Q_{3,1} - Q_{3,4}}{Q_{1.2}} =$$

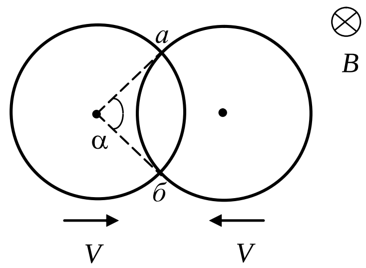
$$= \eta_1 + \eta_2 + \left(Q_{1,3} - Q_{3,4}\right)\left(\frac{1}{Q_{1.2}} - \frac{1}{Q_{1.3}}\right) =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 + \left(Q_{1,3} - Q_{3,4}\right)\frac{Q_{1.3} - Q_{1.2}}{Q_{1.3}Q_{1.2}} =$$

$$= \eta_1 + \eta_2 - \frac{Q_{1.2} - Q_{3,1}}{Q_{1.2}}\,\frac{Q_{1,3} - Q_{3,4}}{Q_{1.3}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

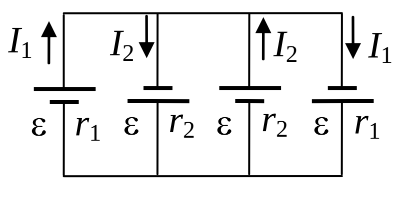
Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Задача 5. (20 баллов). Два одинаковых проволочных кольца радиусом R движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры, в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости колец (см. рис.). Найти направления и модули сил, действующих на каждое кольцо со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны V, а центральный угол, стороны которого проходят через точки касания колец *а* и *б*, равен α. В точках касания колец *а* и *б* имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки кольца, длина которой равна длине окружности кольца, составляет r. Индуктивностями колец пренебречь.



Решение:

Эквивалентная электрическая схема:



ЭДС ε действует на каждом из четырех участков колец, расположенных между точками касания *а* и *б*. Обозначения условных источников: короткий отрезок используется для клеммы «минус», длинный отрезок — для клеммы «плюс». Величина ЭДС равна:

$$\varepsilon = 2BVRsin\frac{\alpha}{2}$$

Сопротивления участков попарно одинаковы и равны:

$$r_1 = \frac{r(2\pi - \alpha)}{2\pi}$$

$$r_2 = \frac{r\alpha}{2\pi}$$

Направления токов на каждом из четырех участков указаны на рисунке. Величины токов определяются с помощью законов Кирхгофа и равны:

$$I_1 = \varepsilon / r_1$$

$$I_2 = \varepsilon / r_2$$

В силу симметрии задачи результирующая сила Ампера **F**, действующая со стороны магнитного поля на каждое из колец, направлена вдоль прямой, проходящей через центры колец. С учетом соотношений модуль силы Ампера F равен:

$$F = \sum_i (I_1 + I_2)B\Delta l_i cos\varphi_i = (I_1 + I_2)B\sum_i \Delta l_i cos\varphi_i = (I_1 + I_2)Bl_{\text{аб}} =$$

$$= \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} sin^2\frac{\alpha}{2}$$

где Δl_i – малый участок кольца, на который действует сила Ампера $\mathbf{F}_i$, направленная вдоль радиуса кольца под углом φ_i к прямой, проходящей через центры колец, $l_{аб}$ – расстояние между точками касания *а* и *б*; суммирование ведется по всем углам φ_i в пределах от –α/2 до –α/2 (на остальных сегментах колец силы Ампера взаимно компенсируются).

Результирующая сила **F**, действующая на кольцо, направлена противоположно вектору скорости этого кольца.

Ответ: $F = \frac{VB^2R^2}{r} \cdot \frac{16\pi^2}{\alpha(2\pi - \alpha)} sin^2\frac{\alpha}{2}$, сила направлена противоположно скорости кольца.