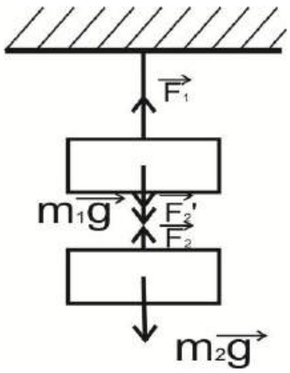
# РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 9 – ГО КЛАССА- 2018 год.
## Очный тур.
## Вариант 1.

***Задача 1. (15 баллов).*** к потолку на невесомой нити подвешен груз 1. В свою очередь, к нижней части этого груза на невесомой нити подвешен груз 2. Отношение сил натяжения верхней и нижней нитей известно: $F_1/F_2$=n. Найти отношение масс грузов $\mu = m_1/m_2$.

**Решение:**

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на висящие тела.




Запишем условие равновесия нижнего (2-го) тела (в проекции на вертикальную ось): $m_2g = F_2$.

Запишем условие равновесия верхнего (1-го) тела (в проекции на вертикальную ось):

$$m_1g + F_2 = F_1.$$

Поделив второе выражение на $F_2$, получим:

$$n = \frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = 1 + \mu.$$

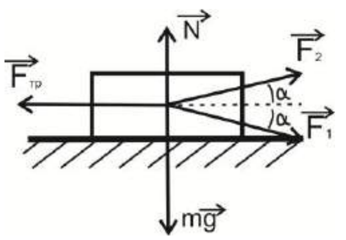
Окончательно имеем:

$$\mu = n - 1.$$

***Задача 2. (20 баллов).*** Если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить силу F=120 Н, направленную вниз (к земле) под углом $\alpha=60^0$ к горизонту, то тело будет двигаться без ускорения. С каким ускорением а будет двигаться это же тело, если ту же силу направить вверх (от земли) под тем же углом α к горизонту? Масса тела m=25 кг. Ускорение свободного падения g=10 м/с$^2$. sin $60^0$=0.87.

**Решение:**

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи, и изобразим на нем все силы, действующие на тело (для обоих условий задачи).




Напишем уравнения, определяющие движение тела без ускорения (1-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$$0 = ma = F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр.1}}.$$

$$mg + F \cdot \sin\alpha = N_1.$$

Оба выражения дают нам возможность найти силу трения скольжения

$F_{\text{тр.1}} = F \cdot \cos\alpha$ ,

$F_{\text{тр.1}} = k \cdot N_1 = k \cdot (mg + F \cdot \sin\alpha)$.

Приравняв последние два выражения, найдем необходимый (для дальнейшего решения задачи) коэффициент трения скольжения:

$$k = \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}.$$

Напишем уравнения, определяющие движение тела с ускорением (2-е условие задачи) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:

$$ma = F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр.2}}.$$

$$mg = F \cdot \sin\alpha + N_2.$$

Найдем из последнего выражения силу трения скольжения $F_{\text{тр.2}}$.

$$F_{\text{тр.2}} = k \cdot N_2 = k \cdot (mg - F \cdot \sin\alpha).$$

У нас есть все, чтобы ответить на вопрос задачи – найти ускорение, с которым будет двигаться тело:

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр.2}}}{m} = \frac{F \cdot \cos\alpha - \frac{F \cdot \cos\alpha}{mg + F \cdot \sin\alpha}(mg - F \cdot \sin\alpha)}{m}.$$

Упрощая выражение для a, окончательно получим:

$$a = \frac{F^2 \cdot \sin 2\alpha}{m(mg + F \cdot \sin\alpha)} = 1.4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

***Задача 3. (15 баллов).*** Какое напряжение U показывает вольтметр с внутренним сопротивлением R=10 Ом, если через него за время τ=10 с протекает электрический заряд q=1 Кл? Сила тока, текущего через прибор, постоянна.

**Решение:**

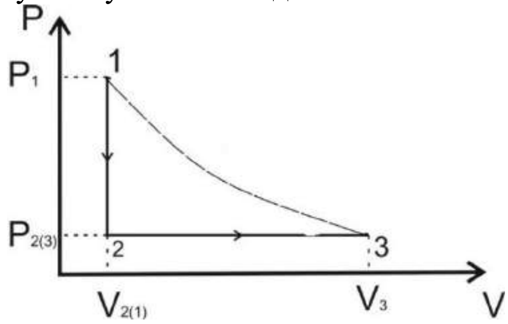
Показание вольтметра определяются выражением $U = I \cdot R$, где $I$ – ток, текущий через прибор, $R$ – внутреннее сопротивление вольтметра. Так как сила тока $I$, текущего через прибор, постоянна, она легко находится из условия задачи: $I = q/\tau$. Окончательно имеем:

$$U = qR/\tau = 1 \text{ В}.$$

***Задача 4. (20 баллов).*** Один моль идеального газа, взятого при температуре $T_0$=300 К, изохорически охладили так, что его давление в сосуде упало в n=3 раза. Затем газ изобарически расширили так, что его температура стала равной первоначальной. Какое количество теплоты Q получил газ в указанном эксперименте? Универсальная газовая постоянная R=8,314 Дж/(К моль).

**Решение:**

Изобразим в «координатах» PV два последовательных процесса (изохорический (1⟼2) и изобарический (2⟼3)), в которых участвует 1 моль идеального газа согласно условию задачи.




Для каждого из процессов напишем 1-е начало термодинамики:

$$Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} + A_{1\to2}.$$
$$Q_{2\to3} = \Delta U_{2\to3} + A_{2\to3}.$$

Сложив эти два выражения, получим:

$$Q = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} = \Delta U_{1\to3} + A_{2\to3}.$$

Здесь мы учли, что газ при изохорическом охлаждении не совершал работы ($A_{1\to2} = 0$).

Согласно условию задачи начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от одного термодинамического параметра – температуры $-\Delta U_{1\to3} = 0$. В результате получаем, что количество теплоты $Q$, которое получил газ в указанном эксперименте, определяется только работой газа при изобарическом процессе:

$$Q = A_{2\to3} = P_2 \cdot \left(V_3 - V_{2(1)}\right) = \frac{P_1}{n} \cdot V_1\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{P_1 \cdot V_1}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right) = \frac{R \cdot T_0}{n}\left(\frac{V_3}{V_1 - 1}\right).$$

Учтем еще раз, что начальная (1-я) и конечная (3-я) точки состояния газа принадлежат одной изотерме:

$P_1V_1 = P_3V_3 \to P_1V_1 = \frac{P_1}{n} \cdot V_3 \to V_1 = \frac{1}{n} \cdot V_3 \to \frac{V_3}{V_1} = n.$

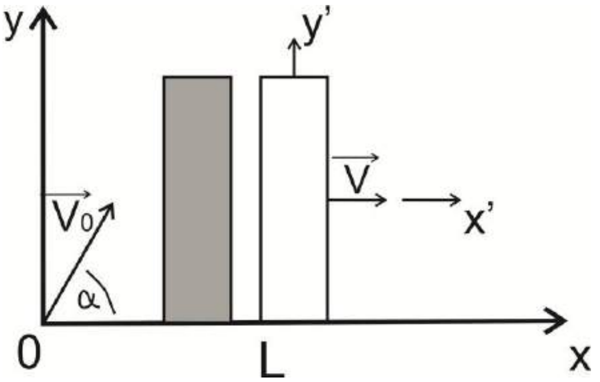
Окончательно имеем:

$$Q = RT_0 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1{,}7 \text{ кДж}.$$

***Задача 5. (30 баллов).*** Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью $v_0$ под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ после броска произошло столкновение шарика со стенкой?

**Решение:**

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.




Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии $L_0$ (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t, \text{для времен } t \le \tau.$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}.$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь $L_0$ – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения $\tau$ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \cdot \tau = L_0 + V\tau$.

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \quad (1)$$

Из положительности $\tau$ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние $L$ (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0 \, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \quad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \text{для времен } t \le \tau.$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}.$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$.

Акт <u>упругого</u> соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -\,v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени (τ+0), следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

*Само время <u>упругого</u> столкновения шарика со стенкой равно нулю.*

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось $x$ (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$$
$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$$
$$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси $x$ (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т.е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть $\tau_2$ – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2 \tag{3}$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \tag{4}$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{5}$$

# РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 9 – ГО КЛАССА- 2019 год.
## Очный тур.
## Вариант 1.

***Задача 1. (15 баллов).*** Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с$^2$.

**Решение:**

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$$mg = 2 * 2\pi r\alpha.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} = 1.4$ мм.

***Задача 2. (15 баллов).*** Два одинаковых проводящих шарика несут заряды разного знака. Соотношение величин зарядов равно k. Шарики были приведены в соприкосновение и снова удалены на прежнее расстояние. Во сколько раз n сила взаимодействия шаров до соприкосновения больше силы их взаимодействия после соприкосновения?

**Решение:**

Величина сил взаимодействия шаров до соприкосновения и после соприкосновения равны соответственно

$$F_{\text{до сопр.}} = \frac{|Q_1Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{и} \quad F_{\text{после сопр.}} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Отсюда $n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{|Q_1Q_2|}{q_1q_2}$.

Согласно закону сохранения электрического заряда алгебраическая сумма зарядов в системе заряженных шариков останется прежней (до и после их соприкосновения):

$$Q_1 + Q_2.$$

Из-за одинаковости размеров шариков каждый из них (после соприкосновения) получит одинаковый по величине и по знаку заряд

$$q = q_1 = q_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}.$$

Если больший по величине заряд был положительным, заряды $q_1$ и $q_2$ будут положительными. Если больший по величине заряд был отрицательным, заряды $q_1$ и $q_2$ будут отрицательными. Изменится характер взаимодействия шариков: притяжение сменится отталкиванием. Тогда

$$n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{|Q_1Q_2|}{q_1q_2} = \frac{|Q_1Q_2|}{q_1q_2} = \frac{4\,|Q_1Q_2|}{(Q_1 + Q_2)^2}.$$

Соотношение величин зарядов равно k. Пусть, к примеру, $Q_1 = -kQ_2$. Знак «минус» отражает разноименность начальных зарядов. Тогда получаем окончательный ответ.

Ответ:

$$n = \frac{F_{\text{до сопр.}}}{F_{\text{после сопр.}}} = \frac{4\,k}{(k-1)^2}.$$

Легко убедиться, что выбор $Q_2 = -\,kQ_1$ приводит к тому же ответу.

Ответ теряет смысл при k = 1. Это имеет четкий физический смысл. Если k = 1 ($Q_1 = -\,Q_2$), то после соприкосновения шаров, они (шары) будут полностью разряжены, и их сила взаимодействия будет равна нулю.

***Задача 3. (15 баллов).*** Железный стержень длины L = 1,5 м при продольной нагрузке P = 5000 Н не должен удлиняться более, чем ΔL = 0,3 мм. Какого сечения S надо взять этот стержень? Модуль Юнга железа $E = 19{,}6 \cdot 10^9$ Н/м$^2$.

**Решение:**

Из закона Гука:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{ES}$$

Определим сечение стержня $S = \frac{PL}{E\Delta L} = 128$ мм$^2$.

***Задача 4. (25 баллов).*** Однородный тонкий обруч массой m и радиуса R скатывается без скольжения с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность. На какую высоту h подпрыгнет обруч после удара о горизонтальную поверхность, если он скатился с высоты H? Угол наклона плоскости к горизонту равен α.

**Решение:**

Пусть в какой-то произвольный момент времени у катящегося без проскальзывания обруча скорость любой точки его геометрической оси равна v. Любая точка обода участвует в двух движениях: вращательное движение (со скоростью равной v) вокруг оси плюс поступательное движение (со скоростью равной v) вместе с любой точкой его геометрической оси. Как следствие вышесказанного, кинетическая энергия обруча (как целого) складывается из кинетической энергии чисто вращательного движения обруча вокруг его геометрической оси (его центра масс) плюс кинетической энергии поступательного движения его центра масс:

$$E_{\text{кин.}} = E_{\text{кин.вр.}} + E_{\text{кин.ц.м.}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча при его скатывании (без скольжения) с высоты H:

$$mgH = mv^2.$$

Отсюда находим скорость оси обода (или, что то же самое, скорость его центра масс) в конце пути вдоль наклонной плоскости:

$$v = \sqrt{gH}\,.$$

Вектор этой скорости направлен вдоль наклонной плоскости в момент предшествующий удару обруча о горизонтальную плоскость. Вертикальная составляющая $v_{\text{вер.}}$ этой скорости равна:

$$v_{\text{вер.}} = \sqrt{gH}\,sin\alpha.$$

При ударе обруча о горизонтальную плоскость горизонтальная составляющая скорости его оси (центра масс) и скорость вращения точек обруча относительно его оси (его центра масс) не изменятся. Вертикальная составляющая скорости его оси (центра масс) меняет свое направление на противоположное. Это изменение вертикальной составляющей скорости центра масс обруча и определяет высоту подскока обруча (его центра масс) после удара о горизонтальную поверхность.

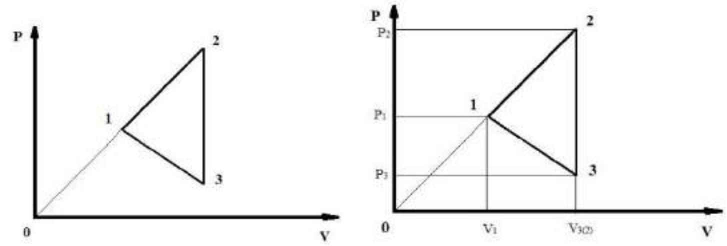
Запишем закон сохранения полной механической энергии обруча для описания его «полета» от момента удара о горизонтальную поверхность до достижения обручем максимальной высоты h:

$$\frac{mv_{\text{вер.}}^2}{2} = mgh.$$

С учетом ранее найденной $v_{\text{вер.}}$ получаем ответ.

Ответ: $h = \frac{H}{2} sin^2\alpha.$

***Задача 5. (30 баллов).*** Найдите работу А, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле (1⟼2⟼3⟼1), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры $T_1$ и $T_2$ в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.




**Решение:**

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, численно равна площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе (1⟼2, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе (3⟼1, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\longmapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла (1⟼2) равна

$$A_{1\longmapsto 2} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2][V_{3(2)} - V_1]. \quad (1)$$

Работа $A_{3\longmapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла (3⟼1) равна

$$A_{3\longmapsto 1} = -\,\frac{1}{2}\,[P_1 + P_3][V_{3(2)} - V_1]. \quad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\longmapsto 2}$ и $A_{3\longmapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\longmapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла (2⟼3) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\longmapsto 2} + A_{3\longmapsto 1} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2][V_{3(2)} - V_1] - \frac{1}{2}\,[P_1 + P_3][V_{3(2)} - V_1]. \quad (3)$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \quad (4)$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$\text{А} = \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3 - P_2][V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][P_1V_1] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][RT_1]. \quad (5)$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» ($0,2,V_{3(2)}$) и ($0,1,V_1$) можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\,. \quad (6)$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1V_1 = P_3V_{3(2)} \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2P_3}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \quad (8)$$

Из изохоры ($2\longmapsto 3$) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \quad (9)$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \quad (10)$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,, \qquad \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \quad (11)$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

<u>Ответ:</u> $$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$