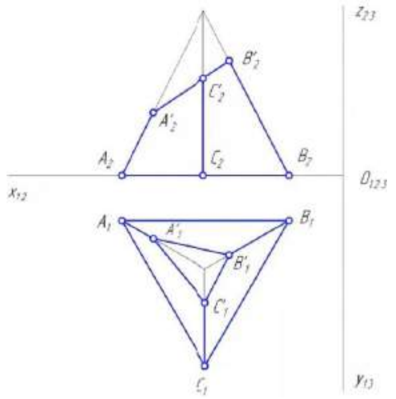
РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 11 – ГО КЛАССА- 2018 год.
Очный тур.
Вариант 1.

Задача 1 (10 баллов). Усеченная пирамида (см. рисунок) помещена в электростатическое поле. Когда измерили потенциалы точек A', B' и C', оказалось, что они одинаковы и равны 5 В, а в точке пересечения высоты пирамиды с основанием потенциал равен 6 В. Найдите возможные направления вектора напряженности электрического поля в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника Δ A'B'C'. Известно, что угол между плоскостями, в которых лежат треугольники Δ A'B'C' и Δ ABC равен 30 градусам. Площадь треугольника Δ A'B'C' много меньше площади треугольника Δ ABC



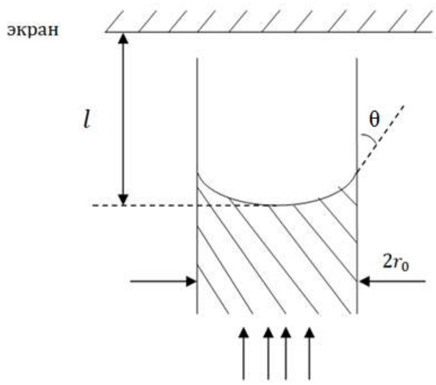
Решение:

Так как потенциалы точек A', B' и C' одинаковы, а площадь треугольника ΔA'B'C' много меньше площади треугольника ΔABC, можно считать, что расстояние между точками A', B' и C' очень мало, следовательно, все точки треугольника ΔA'B'C' лежать на эквипотенциальной поверхности. Вектор напряженности всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности и в сторону уменьшения потенциала. Из условия задачи видно, что потенциал уменьшается снизу-вверх, таким образом из двух возможных направлений вектора напряженности перпендикулярных плоскости ΔA'B'C' нас не удовлетворяет направление вниз, в сторону основания (в сторону увеличения потенциала). Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C' направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C' вверх.

Ответ:

Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C вверх.

Задача 2 (15 баллов). В капилляре радиуса $r_0 = 1$ мм находится слабо смачивающая его стенки жидкость с показателем преломления n=1,4. Через капилляр снизу вверх пропустили параллельный световой пучок такого же радиуса r_0. На экране, расположенном на расстоянии l = 10 см от мениска, образованного жидкостью наблюдается пятно света радиуса r = 5 мм. Найти краевой угол смачивания Q (см. рисунок).



Решение:

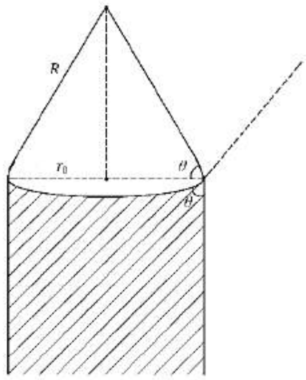


рис. 1

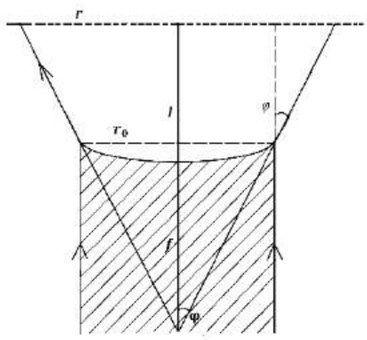


рис. 2

Мениск, образованный жидкостью, можно рассмотреть как рассеивающую линзу с фокусным расстоянием:

$$f = \frac{R}{n-1}$$

где R – радиус кривизны поверхности мениска (рис.1):

$$R = \frac{r_0}{\cos\theta}$$

тогда $f = \frac{r_0}{(n-1)\cos\theta}$

Границы светового пятна образованы лучами с наибольшим углом отклонения φ. Очевидно, что при падении параллельного пучка на рассеивающую линзу, продолжение этих лучей должны проходить через ее фокус (рис.2), тогда:

$$\tan\varphi = \frac{r_0}{f} = (n-1)\cos\theta$$

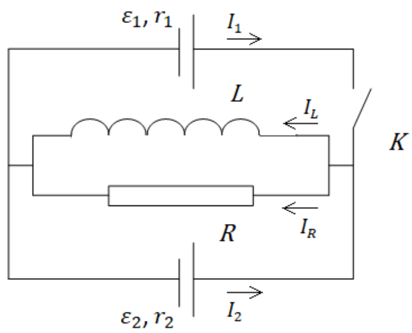
Радиус светового пятна r будет больше радиуса пучка r_0 на величину $l \cdot \tan\varphi$:

$$r = r_0 + l \cdot \tan\varphi = r_0 + l(n-1)\cos\theta$$

Отсюда можно найти $\cos\theta$ и собственно краевой угол θ: $\cos\theta = \frac{r-r_0}{l(n-1)}$

Подставляя численные данные, получаем $\cos\theta = 0{,}1 => \theta \approx 84°$

Задача 3 (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ Kразомкнут, а в замкнутом контуре цепи течёт установившийся ток. Определите величину и направление тока I через сопротивление R сразу после замыкания ключа K. Известны следующие параметры цепи: ЭДС первой батареи $\varepsilon_1 = 10$ В, её внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление $\mathrm{R} = 4$ Ом.



Решение:

Сила тока через катушку до и сразу после замыкания ключа K одинаковая, она равна $I_0 = \frac{\varepsilon_2}{r_1}$.

$I_1, I_2, I_R -$ силы токов через источники $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и через сопротивление R сразу после замыкания ключа K. Предполагаемые направления токов указаны на рисунке.

Система уравнений для момента времени сразу после замыкания ключа:

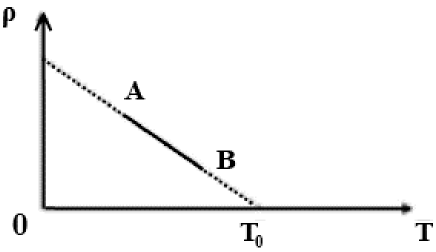
$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_R R = \varepsilon_1 \\ I_2 r_2 + I_R R = \varepsilon_2 \\ I_1 + I_2 = I_R + I_0 \\ I_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} \end{cases}$$

Отсюда:

$$I_R = \frac{\varepsilon_1 r_2}{(r_1 r_2 + R r_1 + R r_2)} = \frac{10\ \text{В} \cdot 20\ \text{Ом}}{(5\ \text{Ом} \cdot 20\ \text{Ом} + 4\ \text{Ом} \cdot 5\ \text{Ом} + 4\ \text{Ом} \cdot 20\ \text{Ом})}$$

$I_R = 1$ А

Задача 4 (25 баллов). Идеальный газ в количестве ϑ моль участвует в процессе АВ (рис.) в координатах $\rho(\text{T})$, где ρ – плотность газа, Т – температура газа. При какой температуре давление газа на 25% меньше максимального? Температура T_0 известна.



Решение:

Запишем уравнение Менделеева-Клайперона $pV = \frac{m}{M}RT$. Так как $\rho = \frac{m}{V}$, выразим давление через плотность: $p = \frac{\rho}{M}RT$.

Найдём уравнение рассматриваемого процесса $\rho = kT + b$.

При $\text{T} = 0$ следует $\rho = \rho_0 = b$, где ρ_0 – максимальная плотность.

При $T = T_0$ следует $\rho = 0$, т.е. $0 = kT_0 + b$. Получаем: $k = -\frac{b}{T_0} = -\frac{\rho_0}{T_0}$.

Таким образом, уравнение процесса: $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) = \rho_0(1 - \eta)$, где $\eta = \frac{T}{T_0}$, следовательно $\text{T} = \eta \cdot \text{T}_0$.

Подставим данную зависимость ρ от η в уравнение Менделеева-Клайперона:

$p = \frac{R}{M}\rho_0(1-\eta)\text{T}$ или $p = \frac{\rho_0 T_0 R}{M}(\eta - \eta^2)$ – квадратное уравнение относительно η. Обозначим это соотношение (1). Приравняем его к нулю и найдём вершину параболы ($x = -\frac{b}{2a}$):

$\eta_{max} = -\frac{\rho_0 T_0 R}{M} : \left(\frac{-2\rho_0 T_0 R}{M}\right) = \frac{1}{2}$. Подставим в (1). Получим $p_{max} = \frac{\rho_0 T_0 R}{4M}$. Обозначим это соотношение (2).

Разделим (1) на (2). Получим $\frac{p}{p_{max}} = 4(\eta - \eta^2)$. По условию задачи $\frac{p}{p_{max}} = 0{,}75$.

Приравнивая, получим квадратное уравнение $4(\eta - \eta^2) = 0{,}75$.

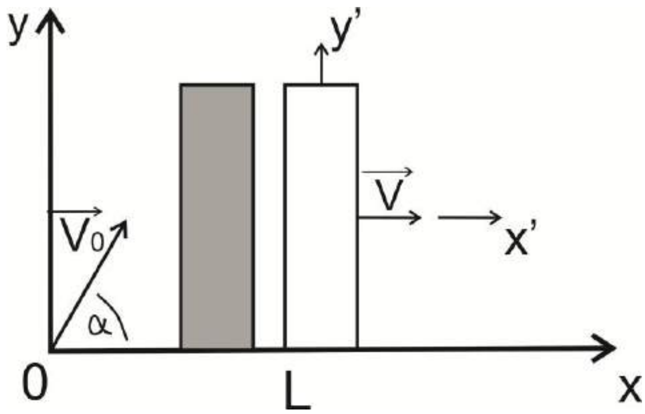
Решая относительно η, получим $\eta_1 = \frac{1}{4}$ и $\eta_2 = \frac{3}{4}$.

Так как $\eta = \frac{T}{T_0}$, получим ответ: $T_1 = \frac{1}{4}T_0$ и $T_2 = \frac{3}{4}T_0$.

Задача 5 (30 баллов). Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ_2 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t, \qquad \text{для времен } t \le \tau.$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t=0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \ \tau = L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \text{для времен } t \le \tau$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau+0) = -\,v_x^*(\tau-0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau+0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau-0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время <u>упругого</u> столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau+0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$v_x^*(\tau-0) = v_x(\tau-0) - V = \ v_0\cos\alpha - V$

$v_x^*(\tau+0) = \ -v_x^*(\tau-0) = V - \ v_0\cos\alpha$

$v_x(\tau+0) = \ v_x^*\,(\tau+0) + V = 2V - v_0\cos\alpha$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau+0) < 0, \text{т. е. } 2V < v_0\cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + \ v_x\,(t)t\,, \tau < t < \ \tau+\tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x\,(\tau+\tau_2) = L + \ v_x(\tau+0)\tau_2 = \frac{L_0\,v_0\cos\alpha}{v_0\cos\alpha - V} + (2V - v_0\cos\alpha)\tau_2. \qquad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau\,v_0\cos\alpha = \ (v_0\cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \ \tau\ \frac{v_0\cos\alpha}{(v_0\cos\alpha-2V)} = \frac{v_0\cos\alpha}{(v_0\cos\alpha-2V)}\,\frac{L_0}{v_0\cos\alpha - V} \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси y. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$$\tau+\tau_2 = \ \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \qquad (6)$$

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \ \frac{v_0\sin\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \ \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

$$L = \ \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

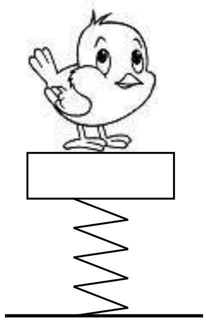
$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha \ \cos\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{2g(v_0\cos\alpha - V)^2}$$

где $v_0\cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче V на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 11 – ГО КЛАССА- 2019 год.
Очный тур.
Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). На чаше весов массы M, закрепленной на пружине, сидит птичка массы m. Сразу после того, как птичка улетела в горизонтальном направлении, чаша стала колебаться по вертикали с амплитудой колебаний A. Найдите период колебаний. Массой пружины и затуханием колебаний пренебречь, чаша весов может двигаться только по вертикали. Ускорение свободного падения g.



Решение:

Когда птичка сидит на чаше, система находится в покое, и

$$(m+M)g=kx,$$

где k – жесткость пружины, x – ее сжатие. Положение равновесия чаши (сжатие пружины) без птички x_0 находится из условия равенства сил тяжести и упругости

$$Mg = kx_0$$

Амплитуда колебаний $A = x - x_0$. Период колебаний чаши на пружине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Из этих соотношений получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{MA}{mg}}$.

Задача 2. (20 баллов). После орудийного выстрела снаряд массой 40 кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами $p_1 = 1{,}8\cdot10^4$ кг·м/с и $p_2 = 0{,}6\cdot10^4$ кг·м/с. Импульсы осколков направлены под углом $\alpha = 60°$ друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной и найдите эту энергию.

Решение:

Пусть m_1 и m_2 –массы осколков, $M = m_1 + m_2$ – первоначальная масса снаряда.

По закону сохранения импульса

$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ или $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha$

Кинетическая энергия до и после взрыва соответственно равны:

$E_0 = \frac{p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$, $E_{кон} = \frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}$

Выделившаяся при взрыве кинетическая энергия:

$E = E_{кон} - E_0 = \left(\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}\right) - \frac{p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$.

После преобразования будем получим: $E = \frac{1}{2M}\left(p_1^2\cdot k + p_2^2\frac{1}{k} - 2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha\right)$, где $k=\frac{m_2}{m_1}$

Для определения минимальной энергии находим производную энергии по k и приравниваем её к нулю.

$E'_k = \frac{1}{2M}\left(p_1^2 - p_2^2\frac{1}{k^2}\right)=0$.

Следует, что $k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{3}$.

Подставим найденное значение k в выражение для энергии E, получим

$E_{min} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot (1-\cos\alpha)}{M}$ =1,35·10^6 Дж.

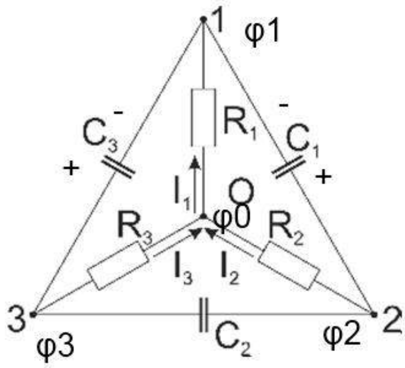
Ответ: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$, $E_{min} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot (1-\cos\alpha)}{M}$ =1,35·10^6 Дж.

Задача 3. (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R, \qquad (1).$$

Аналогично для тока I_1:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R \qquad (2).$$

Сложим выражения (1) и (2):

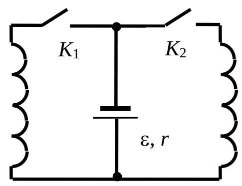
$$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$$

Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$$q_1 = C_1 R(I_1 + I_2).$$



Задача 4. (20 баллов). Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить силу тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше, чем установившийся ток через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

Решение:

После замыкания ключа K_2 напряжения на концах обеих катушек в любой момент времени будут равны друг другу. Так как активные сопротивления катушек равны нулю, это условие записывается в виде равенства ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{dI_1}{dt} = L\frac{dI_2}{dt},$$

где L – индуктивности катушек, I_1 и I_2 – силы токов в катушках.

Отсюда:

$$I_1(t) - I_2(t) = \text{const}, \qquad (1)$$

то есть, при замкнутых ключах разность абсолютных значений сил токов в катушках остается неизменной *в любой момент времени*.

Силу тока через первую катушку в момент замыкания ключа K_2 обозначим через I_0:

$$I_1(t{=}0) = I_0,$$

(I_0 является искомой величиной задачи).

В этот же момент времени сила тока через вторую катушку равна нулю:

$$I_2(t{=}0) = 0.$$

Согласно (1) получим:

$$I_1(t) - I_2(t) = I_1(t{=}0) - I_2(t{=}0) = I_0 = \text{const}. \qquad (2)$$

В установившемся режиме через катушки будут течь постоянные токи, которые обозначим через $I_{уст.1}$ и $I_{уст.2}$. При этом разность потенциалов на концах катушек равна нулю, и, следовательно, сила тока через источник $I_{ист}$ равна:

$$I_{ист} = \varepsilon/r.$$

По правилу Кирхгофа для сил токов имеем:

$$I_{уст.1} + I_{уст.2} = I_{ист} = \varepsilon/r. \qquad (3)$$

Кроме того, по условию задачи:

$$I_{уст.1} / I_{уст.2} = 2. \qquad (4)$$

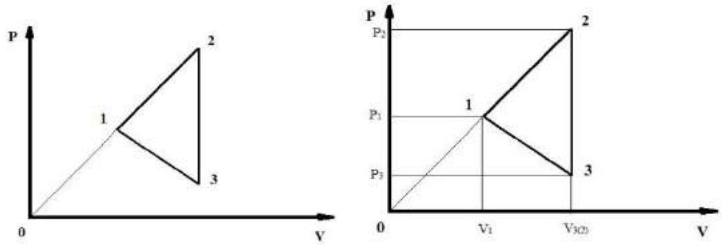
Из уравнений (3) и (4) находим:

$$I_{уст.1} = 2\varepsilon/(3r), \;\; I_{уст.2} = \varepsilon/r.$$

В соответствии с (2) находим искомую величину:

$$I_0 = I_{уст.1} - I_{уст.2} = \varepsilon/(3r).$$

Задача 5. (20 баллов). Найдите работу A, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле ($1\longmapsto 2\longmapsto 3\longmapsto 1$), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.



Решение:

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, численно равна площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе ($1\longmapsto 2$, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе ($3\longmapsto 1$, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\longmapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла ($1\longmapsto 2$) равна

$$A_{1\longmapsto 2} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (1)$$

Работа $A_{3\longmapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла ($3\longmapsto 1$) равна

$$A_{3\longmapsto 1} = -\,\frac{1}{2}\,[P_1 + P_3]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\longmapsto 2}$ и $A_{3\longmapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\longmapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла ($2\longmapsto 3$) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\longmapsto 2} + A_{3\longmapsto 1} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2]\big[V_{3(2)} - V_1\big] - \frac{1}{2}\,[P_1 + P_3]\big[V_{3(2)} - V_1\big]. \qquad (3)$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \qquad (4)$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$A = \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3 - P_2][V_1] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][P_1V_1] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][RT_1]. \qquad (5)$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» $(0,2,V_{3(2)})$ и $(0,1,V_1)$ можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\,. \tag{6}$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1 V_1 = P_3 V_{3(2)} \tag{7}$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2 P_3}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \tag{8}$$

Из изохоры (2⟼3) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \tag{9}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \tag{10}$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \tag{11}$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

Ответ: $$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$