РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 10 – ГО КЛАССА- 2018 год.
Очный тур.
Вариант №1

Задача 1 (10 баллов). Флейта Пана представляет собой набор трубок разной длины из тростника, закрытых с нижнего конца. Если дуть на верхний конец трубки она издает звук. Какой должна быть длина трубки, чтобы звучала нота Соль второй октавы. Этой ноте соответствует частота звука 880 Гц. Скорость звука 340 м/с. Как изменится звук, если тростниковые трубки заменить на медные?

Решение:

Флейта Пана представляет собой набор трубок, открытых с одного конца и закрытых с другого. Если подуть поперек открытого конца трубки, в ней возникают колебания воздуха, и она начинает звучать. Колебания достигают наибольшей амплитуды тогда, когда вдоль трубки образуется стоячая звуковая волна (явление резонанса). В противном случае они быстро гаснут. У открытого конца трубки возникает пучность стоячей волны, а у закрытого – узел. Таким образом, длина трубки открытой с одного конца соответствует четверти длины волны звука. Частота звучания $f = v/4L$, где v – скорость звука, L – длина трубки. Эта частота является основной. Сильные колебания возникают также на частотах, для которых на длине трубки укладывается три четверти волны, пять и т.д. Но эти колебания будут существенно слабее колебаний на основной частоте. Их амплитуды определяют тембр звука.

Материал труб влияет на затухание колебаний на разных частотах и, тем самым, на тембр, но не на основную частоту.

Задача 2 (15 баллов). Вычислить концентрацию и оценить среднее расстояние $\langle r \rangle$ между молекулами азота при условиях близких к нормальным (давление 10^5 Па, температура 0^o С).

Решение:

N_2 – газ.

1. ближний порядок –

дальний порядок –

2. <u>движение молекул:</u> хаотическое поступательное.

<u>I. Концентрация:</u> $P = nkT$.

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{10^5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15} = 0{,}265 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{молекул}}{\text{см}^3}$$

<u>II. Среднее расстояние:</u>

Среднее расстояние между молекулами газа можно определить, как среднюю длину свободного пробега λ.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{N_2}^2 P} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^5} = 9{,}43 \cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

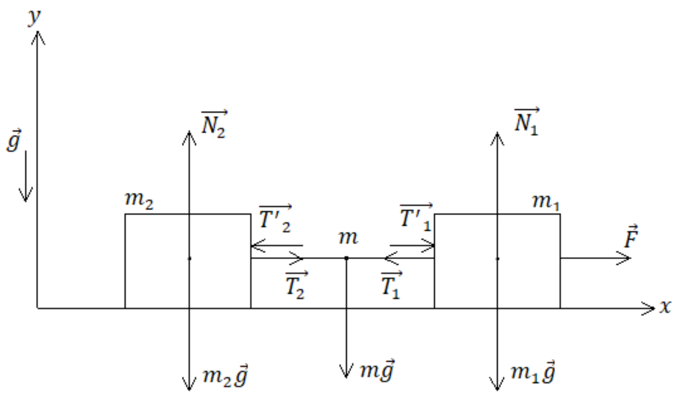
Множитель $\sqrt{2}$ учитывает движение всех молекул, а d_{N_2} – диаметр молекулы азота, который равен 0,3 нм $= 3 \cdot 10^{-10}$м.

В приближении «хаотически расположенных точек» (модель жидкости) получим:

$\langle l_{N_2} \rangle = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}265} \cdot 10^{-20}} = 3{,}35 \cdot 10^{-7}$м, отличие от λ в 3,56 разл

Задача 3 (20 баллов). Два тела находятся на гладкой плоскости (массы тел m_1 и m_2) и соединены нерастяжимым шнуром массой m. На тело m_1 действует сила F. При какой силе F_0 шнур порвется, если неподвижный шнур, прикрепленный к стене, рвется под действие силы T_0?

Решение:



Нить нерастяжима.

Для m_1: $m_1\vec{a_1} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{T_1}$

$$x: m_1a_1 = F - T_1 \quad (1)$$

Для m_2: $m_2\vec{a_2} = \vec{T_2} + m_2\vec{g} + \vec{N_2}$

$$x: m_2a_2 = T_2 \quad (2)$$

Для m: $m\vec{a_3} = \vec{T_1} - \vec{T_2}'$

$$|\vec{T_1}'| = |-\vec{T_1}|, |\vec{T_2}| = |\vec{T_2}|$$

$$x: ma_3 = T_1 - T_2 \quad (3)$$

$$m \neq 0, T_1 > T_2, a_1 = a_2 = a_3 = a - \text{нить не растяжима}$$

$$a = \frac{F}{m_1+m_2+m} \quad (4)$$

$$(4) \text{ в } (1): \quad T_1 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F \quad (5)$$

$$(4) \text{ в } (2): \quad T_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2+m}F \quad (6)$$

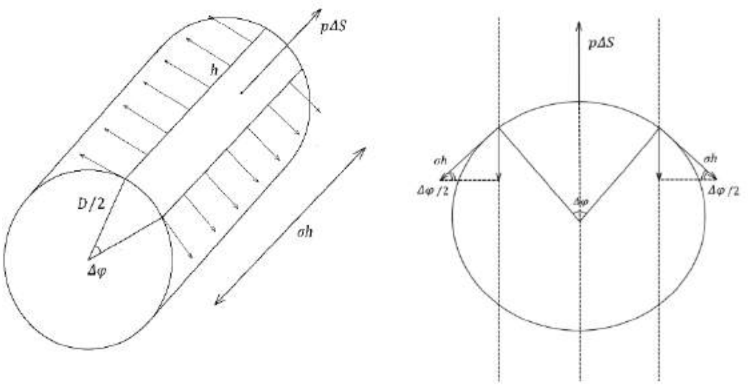
$T_1 > T_2$, нить порвется ближе к m_1, а максимальное значение:

$$T_1 = T_0 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F \quad (7)$$

Отсюда максимальное значение F_0, при которой шнур порвется: $F_0 = \frac{m_1+m_2+m}{m_2+m}T_0$.

Задача 4 *(25 баллов).* Капля воды с коэффициентом поверхностного натяжения σ = 73 мН/м находится в невесомости между двумя гладкими параллельными пластинами, жестко скрепленными друг с другом. Вода смачивает пластины таким образом, что капля представляет собой цилиндр диаметром D = 2 мм с прямыми углами при основании. Определите силу, действующую на каждую из пластин со стороны капли.

Решение:



Искомая сила F, действующая на каждую из пластин со стороны капли, складывается из силы поверхностного натяжения, направленной перпендикулярно поверхности пластины в сторону капли и равной $\sigma\pi D$, и силы давления жидкости $p \cdot \pi D^2/4$, направленной в противоположенную сторону. Давление p жидкости внутри капли можно найти, рассматривая условия равновесия цилиндрической боковой поверхности капли (см. рис.). На малую часть этой поверхности площадью ΔS, ограниченную двумя дугами окружностей с углами $\Delta\varphi$ и длинной $\Delta\varphi \cdot D/2$ и двумя образующими цилиндра длинной h, действует суммарная сила поверхностного натяжения, равная силе давления жидкости, поскольку угол $\Delta\varphi$ мал, то можно считать $sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$:

$$\sigma \cdot 2h \cdot sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \sigma h \cdot \Delta\varphi = \ p\Delta S = p \cdot h \cdot \Delta\varphi \cdot \frac{D}{2}, \text{откуда } p = \frac{2\sigma}{D}$$

Окончательно получаем, что искомая сила равна по величине:

$$F = \sigma\pi D - \frac{2\sigma}{D} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\sigma\pi D}{2}$$

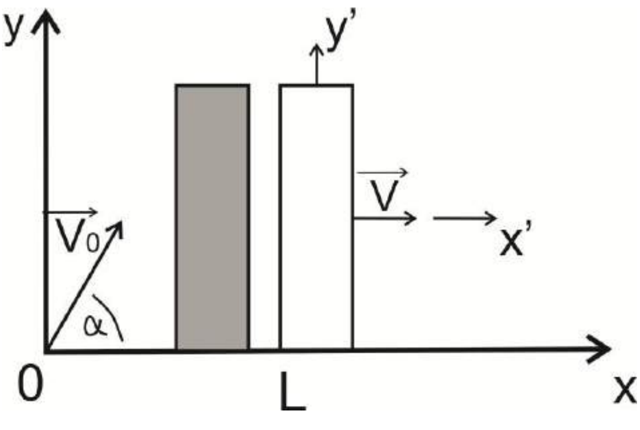
и направлена в сторону капли перпендикулярно каждой из пластин.

Обратим внимание на следующую ошибку, часто допускаемую при решении подобных задач в расчетах не учитывается сила давления жидкости, и поэтому сила F получается вдвое большей.

Задача 5 *(30 баллов).* Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ_2 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \ t, \qquad \text{для времен } t \le \tau.$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \ t - \frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha \ \tau = L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \text{для времен } t \le \tau$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ − скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau + 0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время <u>упругого</u> столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$$
$$v_x^*(\tau + 0) = -v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$$
$$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т.е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0 v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2. \qquad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси y. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$$\tau + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (6)$$

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha\, \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{2g(v_0 \cos\alpha - V)^2}$$

где $v_0 \cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче V на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 10 – ГО КЛАССА- 2019 год.
Очный тур.
Вариант №1

Задача 1. (20 баллов). Капиллярную трубку с очень тонкими стенками прикрепили к коромыслу весов, после чего весы уравновесили. К нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды. После этого пришлось уравновешивать весы грузом массой m = 0,13 г. Определить радиус капилляра r. Коэффициент поверхностного натяжения воды (при температуре, когда был проведен эксперимент) α = 0,073 Н/м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение:

Силы поверхностного натяжения действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Радиусы кривизны r этих поверхностей можно считать одинаковыми из-за тонкости стенки трубки. Значит, одинаковыми можно считать и силы, действующие на внутреннюю и внешнюю поверхности трубки. Тогда условие второго уравновешивания весов можно записать следующим образом

$$mg = 2 * 2\pi r\alpha.$$

Отсюда получаем ответ.

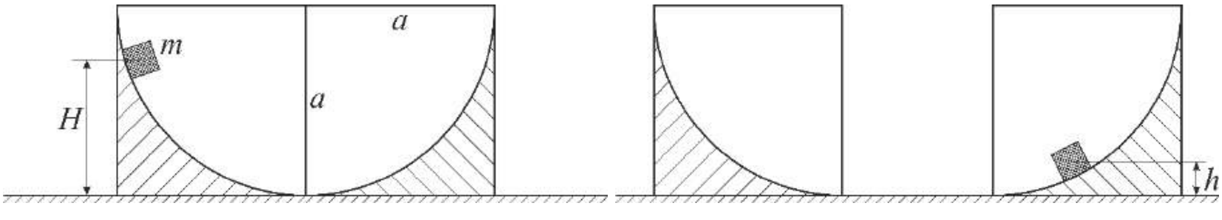
Ответ: $r = \frac{mg}{4\pi\alpha} = 1.4$ мм.

Задача 2. (20 баллов). Частица в прямоугольном сосуде, имевшая скорость ***V***, столкнулась последовательно с тремя взаимно перпендикулярными стенками. Найти изменение вектора скорости частицы *Δ**V***. Все столкновения считать абсолютно упругими.

Решение:

При упругом столкновении отражение частицы от стенки является зеркальным, при этом сохраняется компонента импульса, параллельная стенке, а перпендикулярная меняет направление на противоположное. Пусть ось OX перпендикулярна первой стенке, с которой столкнулась частица, а вектор импульса частицы до столкновения имеет проекции на оси (p_x p_y p_z). Тогда, после столкновения с первой стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$, p_y, p_z). Выберем направление оси OY так, чтобы она была перпендикулярна второй стенке, тогда после столкновения со второй стенкой вектор импульса будет иметь проекции ($-p_x$,$- p_y$, p_z), а после столкновения с третьей, которой перпендикулярна ось OZ, получим, соответственно проекции ($-p_x$,$- p_y$, $-p_z$). Таким образом, после трех столкновений вектор импульса, а, следовательно, и скорости поменяют свое направление на противоположное. Вектор скорости будет равен **-V,** а изменение вектора скорости Δ**V=-V- V=** -2**V**

Задача 3. (20 баллов). В половине куба с длиной ребра, *a* из материала с плотностью *ρ* сделана полусферическая выемка диаметра, *a* (см. рис.). Оставшуюся часть распилили пополам по вертикали и положили на гладкую горизонтальную поверхность. Небольшое тело массы m поместили на внутреннюю стенку первой половины на высоту *H* и отпустили. На какую высоту *h* тело поднимется на второй половине? Трение не учитывать.



Решение:

Пусть масса левой и правой части равна M, скорость тела m в нижней точке траектории – U, скорость левой части в этот момент - V. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$mgH = \frac{mU^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \qquad (1)$$

$$MV = mU \qquad (2)$$

Пусть скорость тела m в верхней точке траектории – U_1, скорость правой части в этот момент – тоже U_1. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\frac{mU^2}{2} = \frac{(m+M)U_1^2}{2} + mgh \qquad (3)$$

$$mU = (m+M)U_1 \qquad (4)$$

Выразим V из уравнения (2) и подставим ее и в (1). Выразим U^2 из получившегося уравнения.

$$U^2 = \frac{2MgH}{m+M}$$

Выразим U_1 из уравнения (4).

$$U_1 = \frac{m}{m+M}U$$

Подставим U^2 и U_1 в уравнение (3) и получим соотношение (5).

$$h = \frac{M^2}{(m+M)^2}H \qquad (5)$$

Найдем массу M. Эта масса равна массе целого куба, минус масса удаленного шара, деленной на четыре.

$$M = \left(\rho a^3 - \rho\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}\right)\Big/4 = \rho a^3\frac{6-\pi}{24}$$

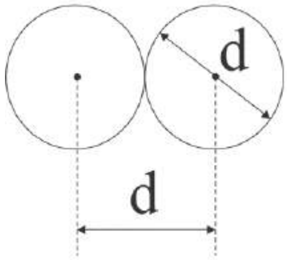
Подставив массу M в уравнение (5) получим ответ.

$$h = H\frac{\rho^2 a^6(6-\pi)^2}{\left(24m + \rho a^3(6-\pi)\right)^2}$$

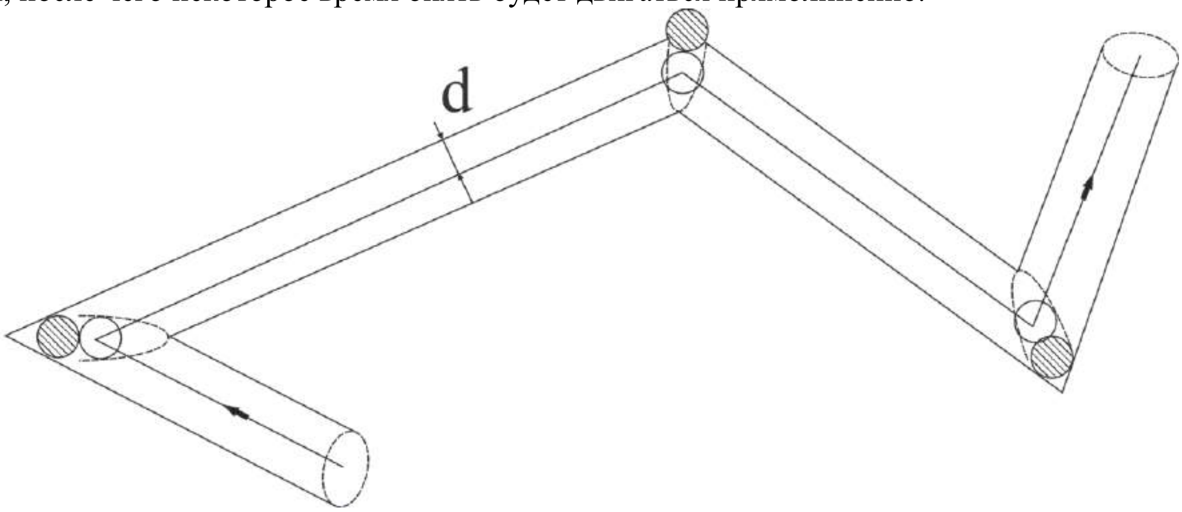
Задача 4. (20 баллов). В ряде случаев молекулу газа позволительно представлять в виде шарика диаметра d. Найти число столкновений υ в единицу времени выделенной молекулы газа с другими молекулами. Средняя скорость относительного движения молекул газа $\langle V_{\text{отн}}\rangle$, концентрация молекул n.

Решение:

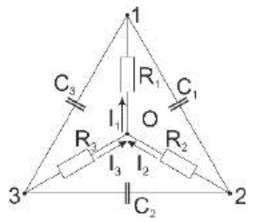
Минимальное расстояние на которое сближаются при столкновении центры двух молекул равно диаметру молекулы d (это расстояние называется эффективным диаметром молекулы) смотри рисуно.



Для того, чтобы посчитать среднее число столкновений ν, предположим, что все молекулы , кроме данной застыли неподвижно на своих местах (тогда она движется со средней скоростью относительного движения <V$_{\text{отн}}$>). Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул , она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой смотри рисунок 2. Это соударение произойдёт в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии меньшем эффективного диаметра молекулы d. В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего некоторое время опять будет двигаться прямолинейно.



За секунду наша молекула проходит с среднем путь, равный средней скорости относительного движения <$V_{отн}$>. Число происходящих за это время соударений с неподвижными молекулами равно числу молекул, центры которых попадают внутри коленчатого цилиндра длины <$V_{отн}$> и радиуса d. Так как в газе расстояние между молекулами много больше их диаметра, мы можем считать объем цилиндра равным: $\pi d^2 \langle V_{\text{отн}} \rangle$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n, получим среднее число столкновений за секунду движущейся молекулы с неподвижной.

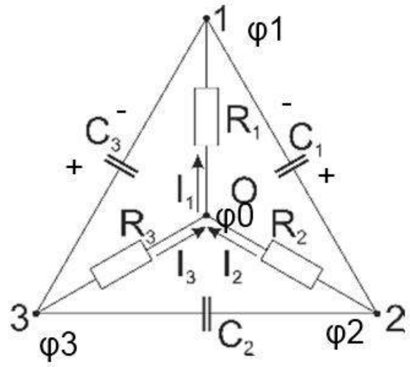


Задача 5. (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R, \qquad (1).$$

Аналогично для тока I_1:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R \quad (2).$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$$

Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$$\mathrm{C} = \frac{q}{U}.$$

Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$$q_1 = \mathrm{C}_1 R(I_1 + I_2).$$