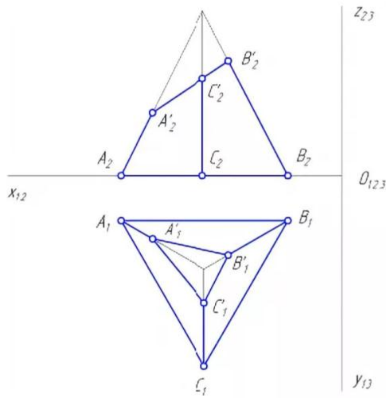
## РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 11 – го КЛАССА- 2018 год. Очный тур.

Вариант 1.

### Задача 1.

Усеченная пирамида (см. рисунок) помещена в электростатическое поле. Когда измерили потенциалы точек A', B' и C', оказалось, что они одинаковы и равны 5 В, а в точке пересечения высоты пирамиды с основанием потенциал равен 6 В. Найдите возможные направления вектора напряженности электрического поля в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C'. Известно, что угол между плоскостями, в которых лежат треугольники ΔA'B'C' и ΔABC равен 30 градусам. Площадь треугольника ΔA'B'C' много меньше площади треугольника ΔABC.



### Решение:

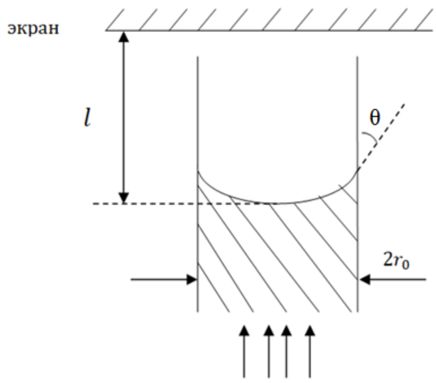
Так как потенциалы точек A', B' и C' одинаковы, а площадь треугольника ΔA'B'C' много меньше площади треугольника ΔABC, можно считать, что расстояние между точками A', B' и C' очень мало, следовательно, все точки треугольника ΔA'B'C' лежать на эквипотенциальной поверхности. Вектор напряженности всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности и в сторону уменьшения потенциала. Из условия задачи видно, что потенциал уменьшается снизу-вверх, таким образом из двух возможных направлений вектора напряженности перпендикулярных плоскости ΔA'B'C' нас не удовлетворяет направление вниз, в сторону основания (в сторону увеличения потенциала). Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C' направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C' вверх.

**Ответ:**

Вектор напряженности в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника ΔA'B'C направлен перпендикулярно плоскости треугольника ΔA'B'C вверх.

### Задача 2.

В капилляре радиуса $r_0 = 1$ мм находится слабо смачивающая его стенки жидкость с показателем преломления $n = 1{,}4$. Через капилляр снизу вверх пропустили параллельный световой пучок такого же радиуса $r_0$. На экране, расположенном на расстоянии $l = 10$ см от мениска, образованного жидкостью наблюдается пятно света радиуса $r = 5$ мм. Найти краевой угол смачивания $\theta$ (см. рисунок).




### Решение:

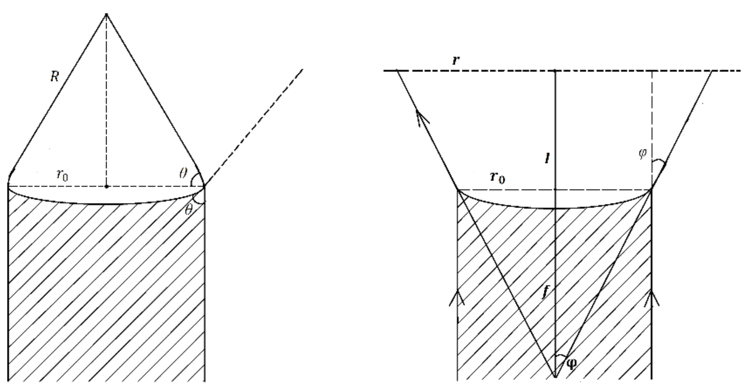



рис. 1 рис. 2

Мениск, образованный жидкостью, можно рассмотреть как рассеивающую линзу с фокусным расстоянием:

$$f = \frac{R}{n-1}$$

где $R$ – радиус кривизны поверхности мениска (рис.1):

$$R = \frac{r_0}{\cos\theta}$$

тогда $f = \frac{r_0}{(n-1)\cos\theta}$

Границы светового пятна образованы лучами с наибольшим углом отклонения $\varphi$. Очевидно, что при падении параллельного пучка на рассеивающую линзу, продолжение этих лучей должны проходить через ее фокус (рис.2), тогда:

$$\tan\varphi = \frac{r_0}{f} = (n-1)\cos\theta$$

Радиус светового пятна $r$ будет больше радиуса пучка $r_0$ на величину $l \cdot \tan\varphi$:

$$r = r_0 + l \cdot \tan\varphi = r_0 + l(n-1)\cos\theta$$

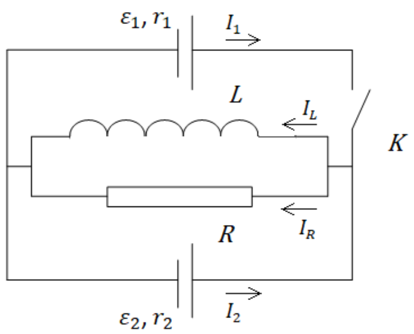
Отсюда можно найти $\cos\theta$ и собственно краевой угол $\theta$: $\cos\theta = \frac{r-r_0}{l(n-1)}$

Подставляя численные данные, получаем $\cos\theta = 0{,}1 => \theta \approx 84°$

**Задача 3.**

В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ $K$ разомкнут, а в замкнутом контуре цепи течёт установившийся ток. Определите величину и направление тока $I$ через сопротивление $R$ сразу после замыкания ключа $K$. Известны следующие параметры цепи: ЭДС первой батареи $\varepsilon_1 = 10$ В, её внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление $R = 4$ Ом.

**Решение:**




Сила тока через катушку до и сразу после замыкания ключа $K$ одинаковая, она равна $I_0 = \frac{\varepsilon_2}{r_1}$.

$I_1, I_2, I_R -$ силы токов через источники $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и через сопротивление $R$ сразу после замыкания ключа $K$. Предполагаемые направления токов указаны на рисунке.

Система уравнений для момента времени сразу после замыкания ключа:

$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_R R = \varepsilon_1 \\ I_2 r_2 + I_R R = \varepsilon_2 \\ I_1 + I_2 = I_R + I_0 \\ I_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} \end{cases}$$

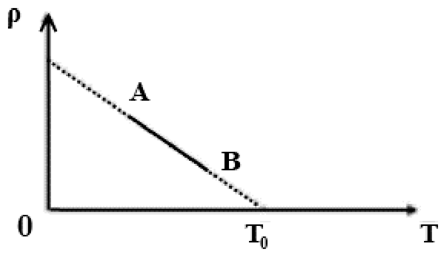
Отсюда:

$$I_R = \frac{\varepsilon_1 r_2}{(r_1 r_2 + R r_1 + R r_2)} = \frac{10\text{ В} \cdot 20\text{ Ом}}{(5\text{ Ом} \cdot 20\text{ Ом} + 4\text{ Ом} \cdot 5\text{ Ом} + 4\text{ Ом} \cdot 20\text{ Ом})}$$

$I_R = 1$ А

**Задача 4.**

Идеальный газ в количестве $\vartheta$ моль участвует в процессе АВ (рис.) в координатах $\rho(\text{Т})$, где $\rho$ – плотность газа, Т – температура газа. При какой температуре давление газа на 25% меньше максимального? Температура $T_0$ известна.




**Решение:**

Запишем уравнение Менделеева-Клайперона $pV = \frac{m}{M}RT$. Так как $\rho = \frac{m}{V}$, выразим давление через плотность: $p = \frac{\rho}{M}RT$.

Найдём уравнение рассматриваемого процесса $\rho = kT + b$.

При $\mathrm{T} = 0$ следует $\rho = \rho_0 = b,$ где $\rho_0 -$ максимальная плотность.

При $T = T_0$ следует $\rho = 0,$ т. е. $0 = kT_0 + b$. Получаем: $k = -\frac{b}{T_0} = -\frac{\rho_0}{T_0}$.

Таким образом, уравнение процесса: $\rho = \rho_0\left(1 - \frac{T}{T_0}\right) = \rho_0(1-\eta),$ где $\eta = \frac{T}{T_0}$, следовательно $\mathrm{T} = \eta \cdot \mathrm{T}_0$.

Подставим данную зависимость $\rho$ от $\eta$ в уравнение Менделеева-Клайперона:

$p = \frac{R}{M}\rho_0(1-\eta)\mathrm{T}$ или $p = \frac{\rho_0 T_0 R}{M}(\eta - \eta^2) -$ квадратное уравнение относительно $\eta$. Обозначим это соотношение (1). Приравняем его к нулю и найдём вершину параболы ($x = -\frac{b}{2a}$):

$\eta_{max} = -\frac{\rho_0 T_0 R}{M}\colon\left(\frac{-2\rho_0 T_0 R}{M}\right) = \frac{1}{2}$. Подставим в (1). Получим $p_{max} = \frac{\rho_0 T_0 R}{4M}$. Обозначим это соотношение (2).

Разделим (1) на (2). Получим $\frac{p}{p_{max}} = 4(\eta - \eta^2)$. По условию задачи $\frac{p}{p_{max}} = 0{,}75$.

Приравнивая, получим квадратное уравнение $4(\eta - \eta^2) = 0{,}75$.

Решая относительно $\eta$, получим $\eta_1 = \frac{1}{4}$ и $\eta_2 = \frac{3}{4}$.

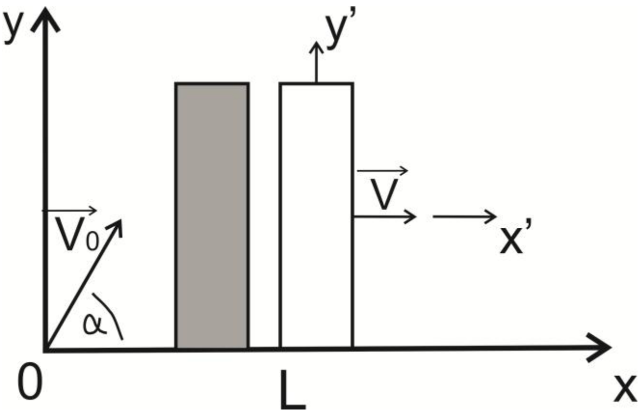
Так как $\eta = \frac{T}{T_0}$, получим ответ: $T_1 = \frac{1}{4}T_0$ и $T_2 = \frac{3}{4}T_0$.

## Задача 5.

Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью $V$ в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время $\tau_2$ после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

## Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.




Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии $L_0$ (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\ t, \qquad \text{для времен } t \leq \tau.$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha\ t - \frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t \leq t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь $L_0$ – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0 = X(t = 0)$.

В момент соударения $\tau$ шарика со стенкой $X(\tau) = x(\tau)$, или $v_0 \cos\alpha\ \tau = L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau = \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{1}$$

Из положительности $\tau$ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние $L$ (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{2}$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha\,, \text{для времен } t \le \tau$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с очень тяжелой (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -\,v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau + 0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время упругого столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$

$v_x^*(\tau + 0) = -\,v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$

$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси $x$ (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т. е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть $\tau_2$ – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t\,, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2. \tag{3}$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau\, v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \tag{4}$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси $y$. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$$\tau + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{6}$$

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{g(v_0 \cos\alpha - V)}$$

$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha\ \cos\alpha\,(v_0 \cos\alpha - 2V)}{2g(v_0 \cos\alpha - V)^2}$$

где $v_0 \cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче $V$ на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).