РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 10 – го КЛАССА- 2018 год. Очный тур. Вариант №1

Задача 1.

Флейта Пана представляет собой набор трубок разной длины из тростника, закрытых с нижнего конца. Если дуть на верхний конец трубки она издает звук. Какой должна быть длина трубки, чтобы звучала нота Соль второй октавы. Этой ноте соответствует частота звука 880 Гц. Скорость звука 340 м/с. Как изменится звук, если тростниковые трубки заменить на медные?

Решение:

Флейта Пана представляет собой набор трубок, открытых с одного конца и закрытых с другого. Если подуть поперек открытого конца трубки, в ней возникают колебания воздуха, и она начинает звучать. Колебания достигают наибольшей амплитуды тогда, когда вдоль трубки образуется стоячая звуковая волна (явление резонанса). В противном случае они быстро гаснут. У открытого конца трубки возникает пучность стоячей волны, а у закрытого – узел. Таким образом, длина трубки открытой с одного конца соответствует четверти длины волны звука. Частота звучания $f = v/4L$, где v – скорость звука, L – длина трубки. Эта частота является основной. Сильные колебания возникают также на частотах, для которых на длине трубки укладывается три четверти волны, пять и т.д. Но эти колебания будут существенно слабее колебаний на основной частоте. Их амплитуды определяют тембр звука.

Материал труб влияет на затухание колебаний на разных частотах и, тем самым, на тембр, но не на основную частоту.

Задача 2.

Вычислить концентрацию и оценить среднее расстояние $\langle r \rangle$ между молекулами азота при условиях близких к нормальным (давление 10^5 Па, температура 0^o С)

Решение:

N_2 – газ.

1. ближний порядок –
   дальний порядок –
2. <u>движение молекул:</u> хаотическое поступательное.

<u>I. Концентрация:</u> $P = nkT$.

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{10^5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15} = 0{,}265 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{молекул}}{\text{см}^3}$$

<u>II. Среднее расстояние:</u>

Среднее расстояние между молекулами газа можно определить, как среднюю длину свободного пробега λ.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{N_2}^2 P} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^5} = 9{,}43 \cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Множитель $\sqrt{2}$ учитывает движение всех молекул, а d_{N_2} – диаметр молекулы азота, который равен 0,3 нм $= 3 \cdot 10^{-10}$м.

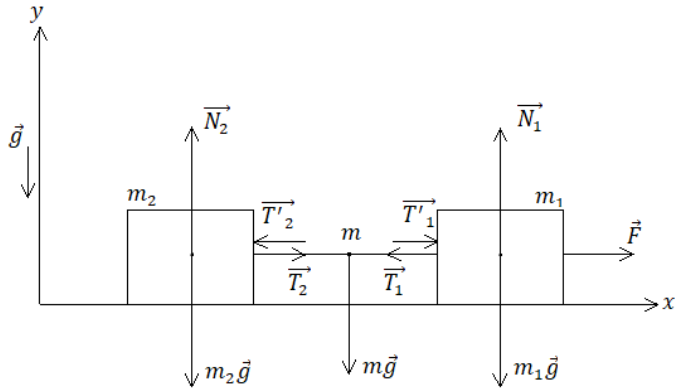
В приближении «хаотически расположенных точек» (модель жидкости) получим:

$\langle l_{N_2} \rangle = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}265} \cdot 10^{-20}} = 3{,}35 \cdot 10^{-7}$м, отличие от λ в 3,56 разл

Задача 3.

Два тела находятся на гладкой плоскости (массы тел m_1 и m_2) и соединены нерастяжимым шнуром массой m. На тело m_1 действует сила F. При какой силе F_0 шнур порвется, если неподвижный шнур, прикрепленный к стене, рвется под действие силы T_0?

Решение:



Нить нерастяжима.

Для m_1: $m_1\overrightarrow{a_1} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{T_1}$

$$x: m_1 a_1 = F - T_1 \quad (1)$$

Для m_2: $m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{T_2} + m_2\vec{g} + \overrightarrow{N_2}$

$$x: m_2 a_2 = T_2 \quad (2)$$

Для m: $m\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{T_1} - \overrightarrow{T_2}'$

$$\left|\overrightarrow{T_1}'\right| = \left|-\overrightarrow{T_1}\right|, \left|\overrightarrow{T_2}\right| = \left|\overrightarrow{T_2}\right|$$

$$x: ma_3 = T_1 - T_2 \quad (3)$$

$$m \neq 0, T_1 > T_2, a_1 = a_2 = a_3 = a - \text{нить не растяжима}$$

$$a = \frac{F}{m_1+m_2+m} \quad (4)$$

$$(4) \text{ в } (1): \quad T_1 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F \quad (5)$$

$$(4) \text{ в } (2): \quad T_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2+m}F \quad (6)$$

$T_1 > T_2$, нить порвется ближе к m_1, а максимальное значение:

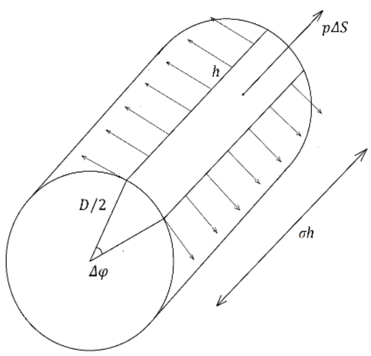
$$T_1 = T_0 = \frac{m_2+m}{m_1+m_2+m}F \quad (7)$$

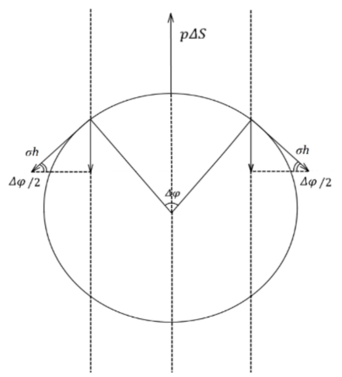
Отсюда максимальное значение F_0, при которой шнур порвется: $F_0 = \frac{m_1+m_2+m}{m_2+m}T_0$.

Задача 4.

Капля воды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 73$ мН/м находится в невесомости между двумя гладкими параллельными пластинами, жестко скрепленными друг с другом. Вода смачивает пластины таким образом, что капля представляет собой цилиндр диаметром $D = 2$ мм с прямыми углами при основании. Определите силу, действующую на каждую из пластин со стороны капли.

Решение:





Искомая сила F, действующая на каждую из пластин со стороны капли, складывается из силы поверхностного натяжения, направленной перпендикулярно поверхности пластины в сторону капли и равной $\sigma\pi D$, и силы давления жидкости $p\cdot\pi D^2/4$, направленной в противоположенную сторону. Давление p жидкости внутри капли можно найти, рассматривая условия равновесия цилиндрической боковой поверхности капли (см. рис.). На малую часть этой поверхности площадью ΔS, ограниченную двумя дугами окружностей с углами $\Delta\varphi$ и длинной $\Delta\varphi\cdot D/2$ и двумя образующими цилиндра длинной h, действует суммарная сила поверхностного натяжения, равная силе давления жидкости, поскольку угол $\Delta\varphi$ мал, то можно считать $sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx\frac{\Delta\varphi}{2}$:

$$\sigma\cdot 2h\cdot sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\sigma h\cdot\Delta\varphi= p\Delta S=p\cdot h\cdot\Delta\varphi\cdot\frac{D}{2}, \text{откуда } p=\frac{2\sigma}{D}$$

Окончательно получаем, что искомая сила равна по величине:

$$F=\sigma\pi D-\frac{2\sigma}{D}\cdot\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\sigma\pi D}{2}$$

и направлена в сторону капли перпендикулярно каждой из пластин.

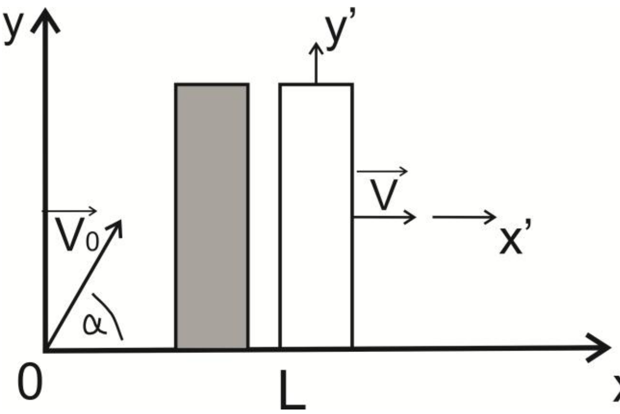
Обратим внимание на следующую ошибку, часто допускаемую при решении подобных задач в расчетах не учитывается сила давления жидкости, и поэтому сила F получается вдвое большей.

Задача 5.

Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную (очень тяжелую) стенку, движущуюся с постоянной скоростью V в том же направлении что и шарик. Скорости $\overrightarrow{v_0}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой, шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ_2 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условию задачи. Этот рисунок соответствует нашей работе в так называемой лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО), связанной с землей.



Шарик в момент броска находится в начале координат. Левая сторона стенки в момент броска шарика находится в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии L_0 (она не дана по условию задачи). Координаты шарика (в ЛИСО) изменяются со временем по закону:

$$x(t)= v_0\cos\alpha\ t, \qquad \text{для времен } t\le\tau.$$

$$y(t)= v_0\sin\alpha\ t-\frac{gt^2}{2}, \text{для времен } t\le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Координата левой стороны стенки $X(t)$ изменяется со временем по закону:

$$X(t) = L_0 + Vt.$$

Здесь L_0 – начальное расстояние от начала координат до стенки: $L_0=X(t=0)$.

В момент соударения τ шарика со стенкой $X(\tau)=x(\tau)$, или $v_0\cos\alpha\ \tau=L_0 + V\tau$

Отсюда получаем время соударения:

$$\tau=\frac{L_0}{v_0\cos\alpha-V} \qquad (1)$$

Из положительности τ получаем $v_0 \cos\alpha - V > 0$. Это физическое условие того, что брошенный шарик «догонит» удаляющуюся от него стенку.

Кроме того, можно записать искомое расстояние L (вдоль горизонта) от точки бросания шарика до точки его столкновения со стенкой:

$$L = X(\tau) = x(\tau) = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (2)$$

Запишем проекции скоростей шарика на оси координат:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha\,, \text{для времен } t \le \tau$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad \text{для времен } t \le t_{\text{падения шарика на землю}}$$

Для простоты и наглядности дальнейшего решения задачи перейдем в движущуюся инерциальную систему отсчета (ДИСО), связанную со стенкой. В этой ДИСО скорость стенки равна нулю, а скорость шарика $\vec{v}^*$ равна $\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{V}$, где $\vec{v}$ и $\vec{V}$ – скорости шарика и стенки в ЛИСО.

В проекции на ось x: $v_x^* = v_x - V$

Акт упругого соударения шарика с <u>очень тяжелой</u> (по условию задачи) стенкой в ДИСО описывается очень просто:

$$v_x^*(\tau + 0) = -\, v_x^*(\tau - 0).$$

В левой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau + 0)$, следующий после столкновения шарика с неподвижной стенкой.

В правой части этого равенства записана проекция скорости шарика (в ДИСО) в момент времени $(\tau - 0)$, предшествующий столкновению шарика с неподвижной стенкой.

Само время <u>упругого</u> столкновения шарика со стенкой равно нулю.

Путем простых преобразований найдем проекцию скорости шарика $v_x(\tau + 0)$ на ось x (в ЛИСО) после соударения шарика со стенкой.

$$v_x^*(\tau - 0) = v_x(\tau - 0) - V = v_0 \cos\alpha - V$$

$$v_x^*(\tau + 0) = -\, v_x^*(\tau - 0) = V - v_0 \cos\alpha$$

$$v_x(\tau + 0) = v_x^*(\tau + 0) + V = 2V - v_0 \cos\alpha$$

Поскольку шарик после соударения со стенкой летит в сторону, противоположную направлению оси x (чтобы вернуться согласно условию задачи в точку бросания – начало координат), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$v_x(\tau + 0) < 0, \text{т.е. } 2V < v_0 \cos\alpha$$

Далее работаем только в ЛИСО.

Пусть τ_2 – время полета шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

Опишем движение шарика от момента столкновения со стенкой до возвращения в точку бросания.

$$x(t) = L + v_x(t)t\,, \tau < t < \tau + \tau_2$$

В момент возвращения шарика в начало координат:

$$0 = x\,(\tau + \tau_2) = L + v_x(\tau + 0)\tau_2 = \frac{L_0\, v_0 \cos\alpha}{v_0 \cos\alpha - V} + (2V - v_0 \cos\alpha)\tau_2. \qquad (3)$$

Обратим внимание на еще одно простое соотношение между неизвестными величинами задачи, являющееся следствием того, что шарик после упругого соударения со стенкой возвращается в точку бросания:

$$\tau\, v_0 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha - 2V)\tau_2 = L \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует:

$$\tau_2 = \tau\, \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{(v_0 \cos\alpha - 2V)}\, \frac{L_0}{v_0 \cos\alpha - V} \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь движение шарика вдоль вертикальной оси координат – оси y. Это -движение тела, брошенного вертикально вверх в поле сил тяжести. На это движение никак не влияет соударение шарика со стенкой. Время полета шарика до возвращения в начало координат хорошо известно:

$$\tau + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (6)$$

Решая совместно (3), (4), (5), (6), отвечаем на вопросы задачи:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{g(v_0\cos\alpha - V)}$$

$$H = \frac{v_0^3 \sin^2\alpha\ \cos\alpha\,(v_0\cos\alpha - 2V)}{2g(v_0\cos\alpha - V)^2}$$

где $v_0\cos\alpha - 2V > 0$

Заменив во всех ответах к задаче V на $-V$, мы получим решение аналогичной задачи, в которой стенка движется на встречу брошенному шарику (сделайте это самостоятельно).