

ОТВЕТЫ К ОЛИМПИАДЕ 11 – го КЛАССА- 2016г. Очный тур.

Вариант 1.

$$1. w = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}})^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}$$

2. К клину необходимо приложить направленную влево силу $F = (m + M)g$.

$$3. \eta = \frac{R_c}{R_3} \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_3 (n+1)^2}} = 5.$$

$$4. v = \frac{mgr(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2 l^2}.$$

$$5. Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\rho\xi(r+3\rho)}{3r}; Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\xi\rho(3\rho-2r)}{3r}; Q_3 = 4\pi\varepsilon_0\xi\rho.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ 11 КЛАССА 1 ВАРИАНТА (2016 г.).

Задача 1 (5 баллов). Ромб составлен из жестких стержней длиной L . Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплён. Вторым начинают двигать с постоянным ускорением a . Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

Решение. Для удобства рассмотрения пронумеруем вершины ромба так, как показано на рисунке 2. Поскольку характер движения вершин 2 и 4 одинаково, будем рассматривать только вершину 2.

В момент времени, когда ромб превратится в квадрат, двигающаяся с ускорением a вершина 3 будет иметь скорость v . К этому моменту времени вершина 2 сместится в направлении движения вершины 3 на вдвое меньшее расстояние, чем прошла вершина 3. Значит, проекции скорости и ускорения вершины 2 на направление движения вершины 3 будут равны $v/2$ и $a/2$ соответственно. К рассматриваемому моменту времени вершина 3 пройдет путь $S = L\sqrt{2}$. Поэтому $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2aL\sqrt{2}} = 2^{3/4}\sqrt{aL}$.

Так как стержни жесткие, то вершина 2 все время движется по окружности радиусом L с центром в вершине 1. Поэтому скорость u вершины 2 направлена по касательной к этой окружности, то есть в рассматриваемый момент времени направлена вдоль стержня, соединяющего вершины 2 и 3. Следовательно, можно записать

$$u = \frac{v/2}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{v}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\sqrt{aL}.$$

Проекция ускорения вершины 2 на направление стержня, соединяющего ее с вершиной 1, есть центростремительное ускорение, равное $\frac{u^2}{L} = a\sqrt{2}$.

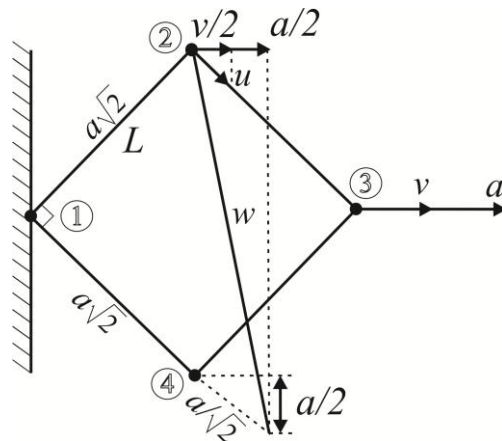


рис. 2.

Мы нашли проекции ускорения вершины 2 на два различных направления. Полное ускорение можно найти, нарисовав соответствующим образом направленные векторы компонентов ускорения, имеющие длины $a/2$ и $a\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляры к ним. Точка пересечения этих перпендикуляров позволит определить направление и величину вектора ускорения вершины 2. Чертеж удобно построить

следующим образом. Выберем масштаб так, чтобы вектор $a/2$ на чертеже имел длину, равную четверти диагонали нашего квадрата. Тогда вектор $a\sqrt{2}$ будет иметь длину, равную стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получаем:

$$w = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}})^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Задача 2 (3 балла). На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом 45° при основании. По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m (см. рисунок). Чему должна быть равна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложение к клину, чтобы ускорение тела массой m было направлено горизонтально? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g .

Решение. На тело массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$ силы реакции опоры \vec{N} со стороны клина.

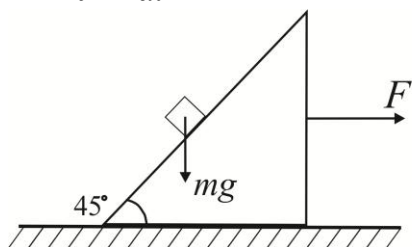


рис. 3.1.

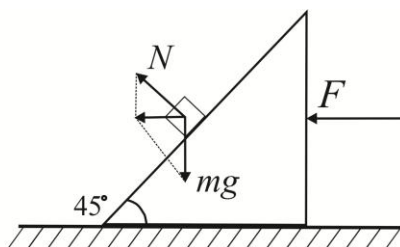


рис. 3.2.

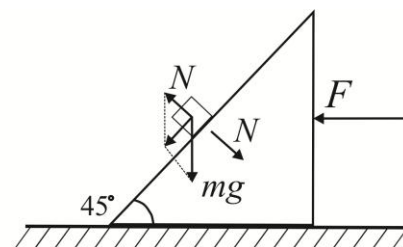


рис. 3.3.

(б) Как видно из рисунка 3.2, ускорение тела будет горизонтально, если $N = mg\sqrt{2}$. При этом равнодействующая сил, приложенных к телу, равна mg и направлено влево. Поэтому ускорение тела направлено влево и равно по величине g . Для того, чтобы в процессе движения клин давил на тело с необходимой силой \vec{N} , он также должен двигаться влево с таким же по величине ускорением g . Чтобы сообщить и клину, и телу такое ускорение, к клину необходимо приложить направленную влево силу $F=(m+M)g$.

Задача 3 (2 балла). Искусственный спутник Земли запущен в плоскости экватора так, что он движется по круговой орбите в направлении вращения Земли («обгоняя» Землю). Во сколько раз η радиус орбиты спутника R_c больше радиуса Земли R_3 , если спутник периодически проходит над заданной точкой Земли ровно через $n=2$ суток? $R_3=6400$ км.

Решение.

$$\begin{aligned}
 (\omega - \omega_3)nT &= 2\pi \\
 \omega_3 &= \frac{2\pi}{T} \\
 \omega &= \frac{2\pi}{nT} + \omega_3 = \frac{2\pi}{nT} + \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{n+1}{n} \right) \\
 m\omega^2 R_c &= \gamma \frac{mM_3}{R_c^2} \\
 \omega^2 &= \gamma \frac{M_3}{R_c^2} \\
 mg &= \gamma \frac{mM_3}{R_3^2} \\
 \gamma M_3 &= gR_3^2 \\
 \omega^2 &= g \frac{R_3^2}{R_c^2} \\
 \eta = \frac{R_c}{R_3} &= \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_3}} = \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_3 (n+1)^2}} = 5.
 \end{aligned}$$

Ответ:

$$\eta = \frac{R_c}{R_3} = \sqrt[3]{\frac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_3 (n+1)^2}} = 5.$$

Задача 4 (2 балла). По П-образной рамке, наклоненной под углом α к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать перемычка массой m . Длина перемычки l , ее сопротивление r , индукция поля B , коэффициент трения между перемычкой и рамкой μ . Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

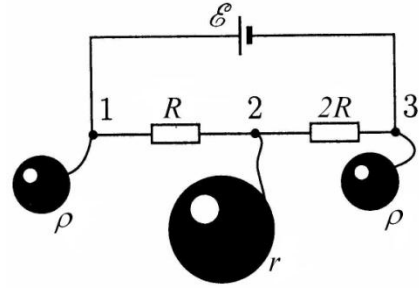
Решение.

$$\begin{aligned}
 mgs \sin \alpha - F_A - F_{\text{тр}} &= 0 \\
 N &= mg \cos \alpha \\
 F_{\text{тр}} &= \mu N \\
 F_A &= IlB \\
 I &= \frac{\xi}{r} \\
 \xi &= BLv
 \end{aligned}$$

Решая получившуюся систему, получаем:

$$v = \frac{mgr(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{B^2 l^2}$$

Задача 5 (3 балла). К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами ρ , r и ρ соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, внутреннее сопротивление источника тока равно нулю, ЭДС батареи известен и равен ξ .



Решение. Пусть Q_1, Q_2, Q_3 – заряды шаров после их подсоединения к цепи. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на электрической цепи и соединительных проводниках мал, то $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Найдём разность потенциалов между точками 1 и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\rho} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0r} = \frac{\xi}{3},$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0r} - \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0\rho} = \frac{2\xi}{3}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\rho\xi(r+3\rho)}{3r}; \quad Q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0\xi\rho(3\rho-2r)}{3r}; \quad Q_3 = 4\pi\epsilon_0\xi\rho.$$