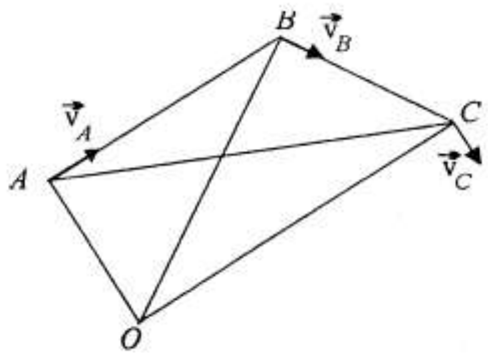
Решения задач 1 варианта 11 класса (2013/14)

Задача **1**. Маша поехала кататься с горки на ледянке, которая имела форму треугольника ABC, с тупым углом при вершине B. Ледянка съехала с горки на ледяной каток и движется по нему таким образом, что скорость вершины A направлена вдоль стороны AB, а скорость вершины B - вдоль стороны BC. Считая заданными длины сторон AB и BC, а также скорости указанных точек V_A и V_B, определить скорость точки C.

Решение:

Проведем $OA \perp AB$ и $OB \perp BC$. Построением находим неподвижную точку O, относительно которой треугольник ΔABC совершает в данный момент вращательное движение (через точку O перпендикулярно плоскости чертежа проходит «мгновенная ось вращения»), т.е. можем исключить из рассмотрения поступательную составляющую движения ΔABC. Отсюда следует направление векторов $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C$, указанное на рисунке.



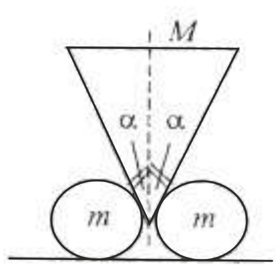
$$\begin{cases} OB^2 = OA^2 + AB^2; \\ OC^2 = OB^2 + BC^2 \\ V_A^2 = \omega^2 \cdot OA^2; \\ V_B^2 = \omega^2 \cdot OB^2; \\ V_C^2 = \omega^2 \cdot OC^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_B^2}{\omega^2} = \dfrac{V_A^2}{\omega^2} + AB^2; \\ \dfrac{V_C^2}{\omega^2} = \dfrac{V_B^2}{\omega^2} + BC^2, \end{cases}$$

$$V_C = \sqrt{(V_B^2 - V_A^2)\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + V_B^2}.$$

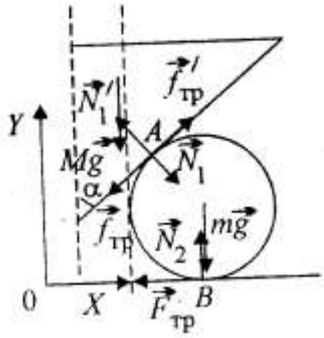
Ответ: $V_C = \sqrt{(V_B^2 - V_A^2)\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + V_B^2}$.

Задача **2.** При каком отношении *M/m* масс призмы *M* и цилиндров *m* цилиндры начнут раскатываться по горизонтальной поверхности при условии, что между призмой и цилиндрами нет проскальзывания? Коэффициент трения между цилиндрами и поверхностью $\mu = 0,4$; угол между боковой гранью призмы и вертикальной осью симметрии $\alpha = 45^o$.



Решение:

Вследствие симметрии системы относительно вертикальной плоскости, проходящей через вершину призмы параллельно оси цилиндра, нет смысла рассматривать всю систему в целом. Достаточно ограничиться одним цилиндром и той половиной призмы, с которой он взаимодействует.



На рисунке $\vec{f}_{тр}$ и $\vec{N}_1$ – силы трения и нормального давления, действующие на цилиндр со стороны клина, соответственно. Аналогичные силы, действующие со стороны цилиндра на клин, обозначены, как $\vec{f}_{тр}{}'$ и $\vec{N}_1{}'$.

По третьему закону Ньютона:

$$\vec{f}_{тр} = -\,\vec{f}'_{тр}, \qquad \vec{N}_1 = -\vec{N}'_1,$$

$\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}_2$ – силы, действующие со стороны поверхности на цилиндр.

Систему координат выберем так, как показано на рисунке.

Условие раскатывания цилиндров означает, что момент сил, вращающих цилиндр против часовой стрелки, должен быть больше или равен моменту сил, вращающих его по часовой стрелке, т.е.

$$f_{тр} \geq F_{тр}.$$

При выводе этого условия принято во внимание, что плечи каждой из сил $\vec{f}_{тр}$ и $\vec{F}_{тр}$ одинаковы и равны радиусу цилиндра. Моменты других, действующих на цилиндр сил, равны нулю, так как их направление проходит через ось цилиндра.

Условие отсутствия проскальзывания между призмой и цилиндрами означает, что
для цилиндра:

$$\vec{N}_1 + m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр} + \vec{f}_{тр} = 0,$$

для клина:

$$\frac{M\vec{g}}{2} + \vec{N}'_1 + \vec{f}'_{тр} = 0.$$

Проецируя эти уравнения на выбранные оси и принимая во внимание, что

$$\left|\vec{f}_{тр}\right| = \left|\vec{f}'_{тр}\right| = f$$

и

$$\left|\vec{N}_1\right| = \left|\vec{N}'_1\right| = N_1,$$

Получим систему уравнений: $$\begin{cases} N_1 cos\alpha - f sin\alpha - F_{тр} = 0; \\ -N_1 sin\alpha - mg + N_2 - f cos\alpha = 0\,; \\ -\frac{Mg}{2} + N_1 sin\alpha + f cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Сложив второе и третье уравнение системы, найдем

$$N_2 = \left(m + \frac{M}{2}\right) g.$$

При раскатывании призмы и цилиндров $F_{mp} = \mu N_2$. Используя эту связь, исключим из первого и второго уравнений системы N_2:

$$N_1(cos\alpha - \mu sin\alpha) - f(sin\alpha + \mu cos\alpha) - \mu mg = 0.$$

Домножив это уравнение на $sin\alpha$, а третье уравнение системы на $(cos\alpha - \mu sin\alpha)$ и вычитая из одного из этих уравнений другое, получим

$$f = \frac{Mg}{2}(cos\alpha - \mu sin\alpha) - \mu mg sin\alpha.$$

Воспользуемся условием раскатывания:

$$g\left[\frac{M}{2}(cos\alpha - \mu sin\alpha)\right] - \mu g sin\alpha \geq \mu g \left(m + \frac{M}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{M}{m} \geq \frac{2\mu(1 + sin\alpha)}{cos\alpha - \mu(1 + sin\alpha)} = 55.$$

Подстановка численных значений дает $\frac{M}{m} \geq 55$. Данная ситуация может осуществиться лишь в том случае, если призма в месте ее соприкосновения с цилиндром не проскальзывает по цилиндру, т.е. если силой, вращающей цилиндр вокруг его оси, является сила трения покоя. Это условие можно записать, как

$$f_{mp} \leq \mu_0 N_1,$$

где μ_0 - коэффициент трения скольжения между призмой и цилиндром. С другой стороны, как отмечалось,

$$f \geq \mu N_2.$$

Следовательно, эта ситуация осуществляется, если $\mu_0 \geq \mu \frac{N_2}{N_1}$.

Отношение $\frac{N_2}{N_1}$ можно определить из первого уравнения приведенной системы, если положить в нем $f_{mp} = F_{mp} = \mu N_2$. Тогда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{cos\alpha}{\mu(1+sin\alpha)} \text{ и } \mu_0 \geq \frac{cos\alpha}{(1+sin\alpha)}.$$

Ответ: $\frac{M}{m} \geq \frac{2\mu(1+sin\alpha)}{cos\alpha-\mu(1+sin\alpha)} = 55$, но только при $\mu_0 \geq \frac{cos\alpha}{(1+sin\alpha)} = 0{,}41$.

Задача ***3***. Метеорит пробивает в обшивке космического корабля отверстие площадью $S = 1$ мм^2. Объем жилых помещений корабля $V = 10^3$ м^3, температура воздуха в них $t = 27^o$ С при давлении $p = 10^5$ Па, молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль. Оцените, сколько времени у космонавтов в запасе, чтобы надеть скафандры?

Решение:

При заданных условиях (p = 10^5 Па) воздух можно считать идеальным газом, поэтому молекулы воздуха, удаленные от отверстие на расстояние не большее чем *<V>Δt* (*<V>* - средняя скорость молекул, под которой будем иметь ввиду близкую к ней среднеквадратическую скорость, $\Delta t = \frac{1}{\nu}$, ν – частота столкновений молекул), будут вылетать в отверстие, и столкновениями друг с другом можно пренебречь при этом за время Δt из отверстия вылетят в среднем

$$\Delta N = \frac{nS\langle V\rangle\Delta t}{6}$$

молекул воздуха, т.е. те молекулы, которые находятся в объеме $S\langle V\rangle\Delta t$ и движутся в направлении отверстия, *n* – концентрация молекул. Это – 1/6 часть (примерно) всех молекул, заключенных в объеме $S\langle V\rangle\Delta t$.

Концентрацию молекул можно выразить через давление p и температуру *T* из уравнения состояния идеального газа *p = nkT,* а скорость можно найти из соотношения, связывающего среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы *<E>* и абсолютную температуру

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}kT = m_0\frac{\langle V^2\rangle}{2}$$

m_0 – масса молекулы.

Тогда

$$\Delta N = \frac{pS\Delta t}{6kT}\sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \frac{pS\Delta t N_A}{6}\sqrt{\frac{3}{RT\mu}} \approx 2\cdot 10^{27}.$$

Здесь $N_A = 6\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}$.

В единицу времени в отверстие площадью S будет вылетать $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{pS}{6}N_A\sqrt{\frac{3}{RT\mu}}$ молекул. Полное число молекул воздуха в корабле N найдем из уравнения Клайперона- Менделеева:

$$N = n\cdot V = \frac{pV}{kT}.$$

Полагая, что скорость утечки воздуха неизменна, а давление воздуха в корабле, необходимое для жизнеобеспечения космонавтов, не меньше половины атмосферного, время утечки и, следовательно, время, которое есть у космонавтов в запасе, можно найти как

$$\tau = \frac{N}{\Delta N/\Delta t} = \frac{3V}{S}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 10^4\ \text{ч}.$$

Ответ: $\tau = \frac{3V}{S}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 10^4\ \text{ч}.$

*Задача **4***. Скорости двух электронов V_1 и V_2 лежат в одной плоскости и при расстоянии l = 10 мкм между электронами образуют углы α = 45° с прямой, соединяющей электроны. На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если $V_1=V_2=V_0 = 10^4$ м/с? Заряд электрона $q=-1,6\cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 0,9\cdot 10^{-30}$ кг.

Решение:

При движении электронов за счет кулоновского отталкивания будут уменьшаться составляющие их скоростей, направленные вдоль прямой, соединяющей электроны. При максимальном сближении электронов эти составляющие станут равными нулю. Составляющие скоростей электронов, перпендикулярные этой прямой, меняться в процессе движения не будут. Для вычисления минимального расстояния между электронами воспользуемся законом сохранения энергии для системы двух электронов:

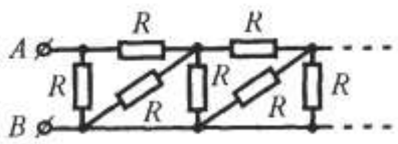
$$\frac{kq^2}{l}+2\frac{mV_0^2}{2}=\frac{kq^2}{r_{\min}}+2\frac{mV_0^2\cos^2\alpha}{2}$$

Отсюда

$$r_{\min}=\frac{klq^2}{kq^2+mV_0^2\cos^2\alpha}=3.4\cdot 10^6\,м.$$

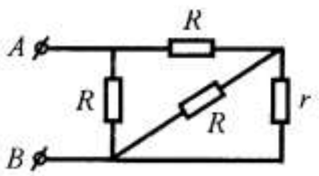
Ответ: $r_{\min}=\dfrac{klq^2}{kq^2+mV_0^2\cos^2\alpha}=3.4\cdot 10^6\,м.$

*Задача **5***. Определите сопротивление R_{AB} бесконечной цепи (см. рисунок), состоящей из периодически повторяющихся элементов. Считать сопротивление R известным.



Решение:

Цепь, которая начинается со второго из периодически повторяющихся элементов, подобна



исходной. Обозначим ее сопротивление

$$R_{AB} = \frac{R(R+2r)}{2R+3r} = r.$$

Отсюда $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Задача ***6***. Цветное стекло растерто в порошок, который кажется совершенно белым. Как узнать, каков был цвет стекла?

Решение:

Необходимо смочить порошок, например, водой. Поверхность сухого порошка кажется белой потому, что она рассеивает падающий на порошок белый свет во все стороны.

Если порошок смочить водой, то поверхность воды будет рассеивать свет только в определенных направлениях, а зерна порошка будут избирательно рассеивать белый свет, придавая рассеянному свету тона самого стекла. При этом насыщенность рассеянного света будет усилена за счет рассеяния его более глубокими слоями порошка.

Задача ***7*** . Зимой на автомобили ставят колеса с шинами со стальными шипами, что улучшает сцепление колеса с дорогой. Однако при морозах (-18 ^{o}C и ниже) шипы становятся неэффективными. Лучший результат при морозе дают специальные зимние шины с мягкой резиной. Почему?

Решение:

Там, где шип опирается на землю, возникает большое давление, под воздействием которого снег (лед) тает, и шип глубоко вгрызается в поверхность. При сильных морозах этого не происходит и сцепление с дорогой падает. Шины с мягкой не твердеющей на морозе резиной плотно прилегают к снежной дороге, обеспечивая достаточно высокое трение.