Решения варианта 1 заданий олимпиады 11 класс 2012 год

ВАРИАНТ 1

Задача 1 (Динамика-гравитация)

Известно, что при подъеме тела с поверхности Земли сила F его притяжения к Земле уменьшается. А как изменяется эта сила при погружении тела в шахту, доходящую до центра Земли? Постройте график зависимости силы F от расстояния r между телом и центром Земли. Масса тела равна m. Считать Землю однородным шаром радиусом $R_{З}$, массой $M_{З}$. Гравитационная постоянная G.

Ответ: $F=GM_{З}m/r^2$ при $r \geq R_{З}$, $F=GM_{З}mr/R_{З}^3$ при $r<R_{З}$.

Решение

При $r>R_{З}$, где $R_{З}$ — радиус Земли, сила F равна:

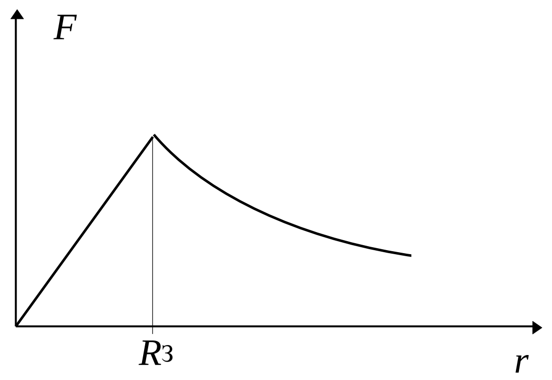
$$F=GM_{З}m/r^2.$$

При погружении тела в шахту действующая на тело гравитационная сила зависит только от массы части земного шара радиусом r, равным расстоянию от тела до центра Земли:

$$F=G((M_{З}/(4\pi R_{З}^3/3))(4\pi r^3/3)m/r^2=GM_{З}mr/R_{З}^3,$$

где $M_{З}$ — масса Земли, $R_{З}$ — радиус Земли, $M_{З}/(4\pi R_{З}^3/3)$ — плотность вещества Земли, $4\pi r^3/3$ — объем части земного шара радиусом r, равным расстоянию от тела до центра Земли.

График искомой зависимости имеет вид:



К решению задачи 1

ВАРИАНТ 1

Задача 2 (прямолинейное равноускоренное движение)

Уклон длиной S=100 м лыжник прошел за t_0=20 с, двигаясь с ускорением a=0,3 м/с^2. Какова скорость лыжника в конце уклона $V_к$?
Ответ: $V_к=(2S+at_0^2)/(2t_0)$=8 м/с.

Решение

Из формулы пути при равноускоренном движении:

$$S=V_0t+at_0^2/2$$

найдем начальную скорость V_0:

$$V_0=(2S-at_0^2)/(2t_0).$$

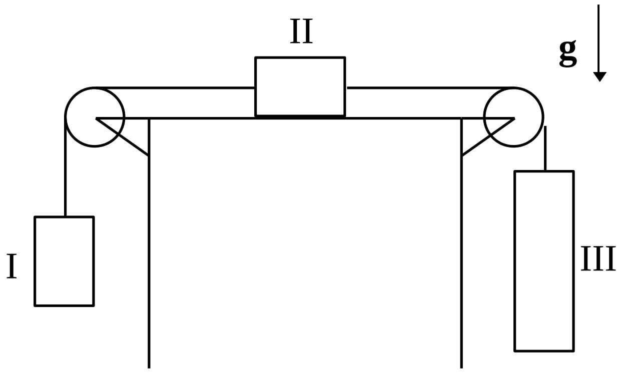
Из формулы скорости при равноускоренном движении найдем конечную скорость лыжника:

$$V_к=V_0+at_0=(2S+at_0^2)/(2t_0)=8 \text{ м/с}.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 3 (Динамика прямолинейного движения, сила трения)

Система из трех тел I, II и III, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями, движется с постоянным ускорением (см. рис.). Нити перекинуты через гладкие невесомые блоки. Среднее тело перемещается по шероховатой горизонтальной поверхности неподвижной подставки, коэффициент трения между телом и подставкой равен μ=0,2. Массы тел I и II одинаковы и равны m, масса тела III равна $2m$, величина m равна 1 кг. Какова сила натяжения нити F_2, связывающей тела II и III? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



К задаче 3

Ответ: $F_2=(3+\mu)mg/2=16$ Н.

Решение

Уравнения движения I, II и III тел соответственно имеют следующий вид:

$$ma=F_1-mg,$$

$$ma=F_1-F_2-\mu mg,$$

$$2ma=2mg-F_2.$$

Здесь a — ускорение тел, μmg — действующая на тело II сила трения скольжения, F_2 — сила натяжения нити, связывающей тела II и III. Решив систему относительно трех неизвестных величин a, F_1 и F_2, получим:

$$a=(1-\mu)g/4=2 \text{ м/с}^2,$$

$$F_1=(5-\mu)mg/4=12 \text{ Н},$$

$$F_2=(3+\mu)mg/2=16 \text{ Н}.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 4 (Колебания — ЗСЭ)

На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой f=1000 Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту H=5 мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найти амплитуду колебаний пластины A. Ускорение свободного падения g=9,8 м/с^2.

Ответ: $A=\sqrt{2gH/(2\pi f)^2-g^2/(2\pi f)^4}\approx 5\cdot 10^{-5}$ м.

Решение

Направим координатную ось x вертикально вверх и положим x=0 в среднем положении пластины.

Зависимость вертикальной координаты пластины от времени описывается законом:

$$x=A\sin(\omega t),$$

где $\omega=2\pi f$ — циклическая частота колебаний.

Зависимость проекции скорости пластины на ось x от времени описывается выражением:

$$V_x=A\omega\cos\omega t.$$

Зависимость проекции ускорения пластины на ось x от времени описывается выражением:

$$a_x=-A\omega^2\sin\omega t.$$

Песчинки отрываются от пластины и подпрыгивают при движении пластины снизу вверх. Обозначим координату пластины в момент отрыва песчинки через h.

В момент отрыва от пластины песчинки сила, с которой песчинка давит на пластину, становится равной нулю. Поэтому ускорение песчинки в этот момент равно ускорению свободного падения g:

$$a_x=-A\omega^2\sin\omega t_0=-g. \qquad (1)$$

Уравнение (1) определяет момент t_0 отрыва песчинки от пластины. Из него удобно выразить величину $\sin\omega t$:

$$\sin\omega t_0=g/(A\omega^2).$$

Координата пластины и песчинки в момент ее отрыва равна (с учетом полученного выражения для $\sin\omega t_0$):

$$h=A\sin\omega t_0=g/\omega^2.$$

Скорость пластины и песчинки в момент ее отрыва, которую обозначим через V_{x0}, равна:

$$V_{x0}=A\omega\cos\omega t_0.$$

Запишем закон сохранения энергии песчинки для моментов ее отрыва и пребывания в высшей точке траектории на высоте H (m— масса песчинки):

$$mgh+mV_{x0}^2/2=mgH. \qquad (2)$$

Преобразуем это уравнение с учетом ранее полученных выражений для h и V_{x0}:

$$g/\omega^2+A^2\omega^2\cos^2\omega t_0/(2g)=H,$$
$$g/\omega^2+A^2\omega^2(1-\sin^2\omega t_0)/(2g)=H,$$
$$g/\omega^2+A^2\omega^2(1-g^2/(A^2\omega^4))/(2g)=H,$$
$$g/(2\omega^2)+ A^2\omega^2/(2g)=H.$$

Отсюда найдем искомую амплитуду колебаний пластины A:

$$A=\sqrt{2gH/\omega^2-g^2/\omega^4}=\sqrt{2gH/(2\pi f)^2-g^2/(2\pi f)^4}\approx 5\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Итак, $A=\sqrt{2gH/(2\pi f)^2-g^2/(2\pi f)^4}\approx 5\cdot 10^{-5}$ м

$$A=\sqrt{2gH/(2\pi f)^2-g^2/(2\pi f)^4}\approx 5\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 5 (законы идеального газа)

Какое давление рабочей смеси P_2 устанавливается в цилиндрах двигателя автомобиля ЗИЛ, если в такте сжатия температура повышается с t_1=50 ^{0}С до t_2=250 ^{0}С, а объем уменьшается с V_1=0,75 л до V_2=0,12 л? Первоначальное давление равно P_1=80 кПа.

Ответ: $P_2=P_1V_1T_2\ /(T_1V_2)\approx 810$ кПа, где $T_1=t_1+273{,}15$ и $T_2=t_2+273{,}15$ — значения абсолютной температуры смеси, К.

Решение

Параметры газа в начале и конце такта сжатия свяжем, используя объединенный газовый закон:

$$P_1V_1/T_1=P_2V_2/T_2,$$

где $T_1=t_1+273{,}15$ и $T_2=t_2+273{,}15$ — значения абсолютной температуры смеси, К.

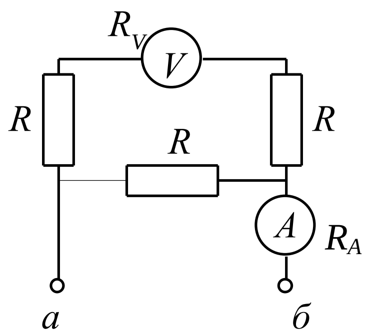
Отсюда искомое давление P_2 равно:

$$P_2=P_1V_1T_2\,/(T_1V_2)\approx 810 \text{ кПа}.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 6 (законы постоянного тока)

Определить напряжение $U_{аб}$ между точками *а* и *б* в электрической цепи, изображенной на рисунке. Показание вольтметра U=250 В. Сопротивления всех резисторов и сопротивление вольтметра одинаковы и равны $R=R_V$=1000 Ом, сопротивление амперметра R_A=250 Ом.



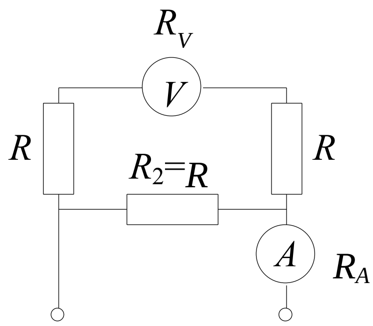
К задаче 3

Ответ: $U_{аб} = U\left(3 + 4\dfrac{R_A}{R}\right) = 1000\,\text{В}$.

Решение

Ток через вольтметр равен:

$$I_V = \frac{U}{R_V} = \frac{U}{R}.$$



К задаче 3

Напряжение на сопротивлении R_2:

$$U_{R2} = I_V R = 3U.$$

Ток через сопротивление R_2:

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{3U}{R}.$$

Ток I_A через амперметр равен:

$$I_A = I_V + I_{R2} = \frac{U}{R} + \frac{3U}{R} = \frac{4U}{R} = 1\,\text{А}.$$

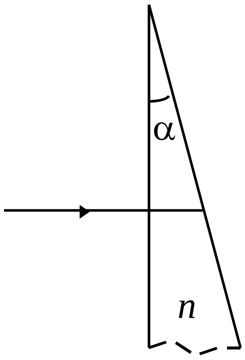
Напряжение между точками *а* и *б*:

$$U_{аб} = U_{R2} + I_A R_A = 3U + \frac{4U}{R} R_A = U\left(3 + 4\frac{R_A}{R}\right) = 1000\,\text{В}.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 7 (оптика-закон преломления)

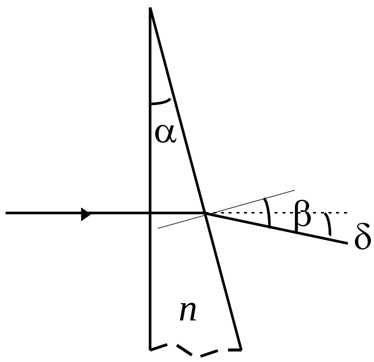
Луч света падает из воздуха нормально на боковую грань стеклянной призмы с преломляющим углом $\alpha=20^0$ (см. рис.). На сколько градусов δ отклонится луч от своего первоначального направления при выходе из призмы, если он внутри призмы падает на вторую боковую грань? Абсолютный показатель преломления стекла n=1,6.



К задаче 7

Ответ: $\delta=\arcsin(n\sin\alpha)-\alpha\approx13^0$.

Решение.



К решению задачи 7

Угол падения луча на вторую боковую грань внутри призмы равен преломляющему углу призмы α. Поэтому закон преломления луча на второй боковой грани имеет вид:

$$n\sin\alpha=\sin\beta,$$

где β — угол преломления.

Искомый угол отклонения δ равен (см. рисунок к решению задачи):

$$\delta=\beta-\alpha=\arcsin(n\sin\alpha)-\alpha\approx13^0.$$

ВАРИАНТ 1

Задача 8 (Закон Ампера)

Тонкий стержень длиной L=70 см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, равна L_1=30 см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B=4 мТл. Найти величину результирующей силы Ампера F, действующей на стержень, если по нему пропускать ток I=10 А.

Ответ: $F = IB\sqrt{L_1^{\,2} + \left(L - L_1\right)^2} = 2 \cdot 10^{-2}$ Н.

Решение.

Обозначим через L_2 длину второй стороны угла, образованного двумя частями стержня (L_2=L–L_1=40 см). На две части стержня действуют силы Ампера F_1=IL_1B и F_2=IL_2B=$I(L$–$L_1)B$, перпендикулярные друг к другу (см. рис.). Суммарная сила Ампера равна:

$$F = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} = IB\sqrt{L_1^{\,2} + L_2^{\,2}} = IB\sqrt{L_1^{\,2} + \left(L - L_1\right)^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$