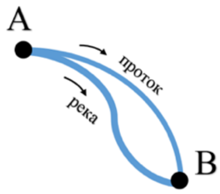
9 КЛАСС

1. Расстояния от пункта А до пункта В по реке и по протоку одинаковы и равны 1 км. Скорость течения в протоке равна V км/ч, а в реке $(2V+1)$ км/ч. Течение и в реке, и в протоке направлено от А к В. Если к разности времен движения катера по протоку из В в А и обратно по протоку прибавить время движения плота по реке из А в В, то получится ровно 1 час. На сколько километров в час скорость катера больше скорости течения в протоке? Значение V не дано. В ответе должно получиться число.



Решение. Пусть $S = \text{AB} = 1$ км, U км/ч – собственная скорость катера, $V_1 = 2V + 1$ км/ч – скорость течения в реке, $T = 1$ ч – данное в задаче время.

По условию

$$\frac{S}{U-V} - \frac{S}{U+V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Пусть $x = U - V$ – искомая разность. Тогда

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{x+2V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Преобразовав, получим относительно x уравнение

$$(S - TV_1)x^2 + 2V(S - TV_1)x + 2SV_1V = 0.$$

Заметим, что $S - TV_1 = -2SV \neq 0$. Значит, уравнение можно на эту величину поделить: $x^2 + 2Vx - 2V - 1 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2V - 1$. Корень x_2 отрицателен, поэтому $U - V = x_1 = 1$.

Ответ: 1 км/ч.

2. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы.

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 & \text{(а)} \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 & \text{(б)} \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 & \text{(в)} \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 & \text{(г)} \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \mathrm{b}_2b_3 - b_1b_4$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4b_4 = 1 - a_3b_2 = 1 - a_2b_3 = -6$.

Ответ: $a_4b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\text{ где }\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\text{ и }\mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

3. Решите уравнение $2^x+2^y=2^{xy-1}$ в целых числах.

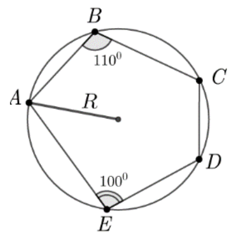
Решение. Пусть сначала $x=y$. Тогда уравнение примет вид $2^x+2^x=2^{x^2-1}$.

Отсюда $2^{x+1}=2^{x^2-1}\Leftrightarrow x+1=x^2-1\Leftrightarrow x=-1$ или $x=2$.

Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x<y$. Положим $y=x+n, n\in\mathbb{N}$. Тогда $2^x+2^{x+n}=2^{xy-1}\Leftrightarrow 1+2^n=2^{xy-1-x}$, что невозможно, так как левая часть – нечетное число, превосходящее 2, а правая часть либо четна (если $xy-1-x\geq 1$), либо не превосходит 2 (если $xy-1-x<1$).

Ответ: $(-1,-1),(2,2)$.

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность радиуса R. Известно, что $\angle B=110^0, \angle E=100^0$. Найдите сторону CD.



Решение. Градусные меры дуг $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{CA}$ равны соответственно $2\cdot(180^0-\angle E)$ и $2\cdot(180^0-\angle B)$. Сумма градусных мер дуг $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{CA}$ и $\overset{\frown}{DC}$ равна 360^0. Значит, величина угла CAD (равная половине градусной меры дуги $\overset{\frown}{DC}$) определяется равенством[1] $\angle CAD=\angle B+\angle E-180^0=30^0$. По формуле для радиуса описанной около треугольника CAD окружности находим[2]

$$R=\frac{CD}{2\cdot\sin\angle CAD}=CD.$$

Ответ: $CD=R$.

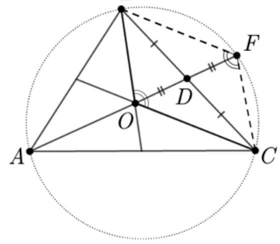
Комментарии.

- [1] Отсюда следует, что *сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше* 180^0.
- [2] Имеют место аналогичные формулы:

$$-2R=\frac{CD}{\sin(\angle B+\angle E)}=\cdots=\frac{BC}{\sin(\angle A+\angle D)}.$$

Оказывается, эти равенства выражают *необходимое и достаточное условие* того, что около данного пятиугольника можно описать окружность радиуса R.

5. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A, если $\angle BAC=35^0$, $\angle BOC=145^0$, $BC=a$.



Решение. Обозначим длину искомой медианы AD за m. На прямой AD вне треугольника отметим такую точку F, что $OD=DF=m/3$. Четырехугольник $OBFC$ – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам (по условию $BD=DC$, и $OD=DF$ по построению). В параллелограмме противоположные углы равны, следовательно

$$\angle CFB=\angle BOC. \qquad (1)$$

В четырехугольнике $ABFC$, по условию, а также в силу равенства (1), сумма противоположных углов BAC и CFB равна 180^0. Значит, вокруг четырехугольника $ABFC$ можно описать окружность. Известно, что если две хорды окружности, BC и AF, пересекаются в точке D, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, то есть $BD \cdot DC = AD \cdot DF \Leftrightarrow (a/2)^2 = m \cdot m/3$. Отсюда $m = a\sqrt{3}/2$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0), B(1424233, 2848467), C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

Решение. Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно $BC = \sqrt{5}$. Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $1/\sqrt{5}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,50.

7. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение. Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x – некоторое 98-значное число. Посмотрим какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу x приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда,

- если $m = 0$, то припишем 12 или 21;
- если $m = 1$, то припишем 11;
- если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных 3.) Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$. Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98}$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96}$$
$$\dots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины $A_4, \dots, A_{98}$ при этом сокращаются), получим

$$A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{98}.$$

Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что $A_2 = 2$.

Тогда $A_{100} = 2 + \frac{4^{50} - 4}{3} = \frac{4^{50} + 2}{3}$.

Ответ: $\frac{4^{50}+2}{3}$.

8. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют *целочисленной*, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k+1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

Решение. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до перестановки слагаемых способом, а именно: $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя[1]: $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа: $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$. Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежат 8 целочисленных точек:

$$(4,33),(33,4),(9,32),(32,9),(12,31),(31,12),(23,24),(24,23).$$

Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

Ответ: Например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий. [1]Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что $5 = (2+i)(2-i) = 2^2 + 1^2$. Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично, $13 = (2+3i)(2-3i) = 2^2 + 3^2$. В то же время число $65 = 5 \cdot 13$ в виде произведения двух комплексно сопряженных множителей представимо двумя способами:

$$5 \cdot 13 = (2+3i)(2+i) \cdot (2-3i)(2-i) = (1+8i) \cdot (1-8i) = 1^2 + 8^2$$

или

$$5 \cdot 13 = (2-3i)(2+i) \cdot (2+3i)(2-i) = (7-4i) \cdot (7+4i) = 7^2 + 4^2.$$