11 КЛАСС

1. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9)$.

Решение.

$$2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow$$
$$x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 3 - \log_{3-x}(3 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 1 & (1) \\ x < 3, \quad x \neq 2. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1) системы. Обозначим $x^{\log_2 x} = y, y > 0$. Тогда (1) $\Leftrightarrow y - \frac{12}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{(y+3)(y-4)}{y} < 0$. Так как $y > 0$, то $y \in (0, 4)$.

Отсюда $x^{\log_2 x} < 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}$ – это ответ в неравенстве (1). Далее учтем ограничения (2). Для этого сравним числа $2^{\sqrt{2}}$ и 3.

Заметим, что $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$ и $2^{1,5} < 3$, так как $8 = (2^{1,5})^2 < 3^2 = 9$. Поэтому $2^{\sqrt{2}} < 3$.

Запишем ответ с учетом (2).

Ответ: $x \in \left(2^{-\sqrt{2}}, 2\right) \cup \left(2, 2^{\sqrt{2}}\right)$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 1$.

Решение. Сделаем замену

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \alpha \in (-\pi, \pi). \qquad (1)$$

Тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha, \ \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha,$$

и исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} = 1. \qquad (2)$$

Если $\cos\alpha < 0$, то левая часть (2) строго меньше 1, и корней у (2) нет. В случае же, когда $\cos\alpha \geq 0$ и $\sin\alpha \geq 0$, имеем очевидное неравенство

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \geq \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Причем равенство достигается, только когда или $\cos\alpha = 1$, или $\sin\alpha = 1$. Значит, либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \pi/2$. Подставив найденные значения α в (1), найдем искомое t.

Ответ: $t \in \{0, 1\}$.

3. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1 и 2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение: Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x – некоторое 98-значное число. Посмотрим какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу x приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда,

- если $m = 0$, то припишем 12 или 21;
- если $m = 1$, то припишем 11;
- если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных 3.) Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$. Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98}$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96}$$
$$\ldots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины $A_4, \ldots, A_{98}$ при этом сокращаются), получим $A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{98}$. Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что $A_2 = 2$. Тогда $A_{100} = 2 + \frac{4^{50}-4}{3} = \frac{4^{50}+2}{3}$.

Ответ: $\frac{4^{50}+2}{3}$.

4. Решите уравнение $2^x + 2^y = 6^t$ в целых числах.

Решение. Пусть сначала $x = y$. Исходное уравнение в этом случае примет вид
$$2^{x+1} = 6^t. \qquad (1)$$
Если $t > 0$, то правая часть (1) кратна трем, а левая – нет. Значит, $t \le 0$. Если же предположить, что $t < 0$, то, переписав (1) в виде $2^{-x-1} = 6^{-t}$, вновь придем к противоречию: кратное трем число 6^{-t} не может быть никакой степенью двойки. Поэтому $t = 0$ и $x = y = -1$.

Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим
$$y = x + n, n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$
Исходное уравнение запишется в виде
$$2^x \cdot (1 + 2^n) = 6^t. \qquad (3)$$
Заметим, что $t \ge 0$. Действительно, из (3) следует, что $3^{-t} \cdot (1 + 2^n) = 2^{t-x}$. Если $t < 0$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая – нет. Значит, $t \ge 0$. Но тогда и $x \ge 0$ (иначе, согласно (3), дробное число равнялось бы целому). Число 2 входит в канонические разложения на простые множители левой и правой частей (3) в одной и той же степени, поэтому
$$x = t. \qquad (4)$$
Сократив обе части (3) на 2^x и перенеся 1 в другую часть, получим
$$2^n = 3^t - 1. \qquad (5)$$

Решим уравнение (5), предполагая n натуральным, а t – неотрицательным целым.

- Пусть $n = 1$. Тогда $t = 1$. С учетом (2) и (4) находим решение исходного уравнения:
$$x = 1, y = 2, t = 1;$$

- Пусть $n > 1$. Тогда левая часть (5) кратна 4. Если t нечетно, то правая часть (5) на 4 не делится. Значит, $t = 2m, m \in \mathbb{Z}, m \ge 0$. Из (5) следует, что $2^n = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Значит, числа $3^m - 1$ и $3^m + 1$ являются степенями двойки. Заметим также, что на числовой оси эти числа находятся друг от друга на расстоянии 2. Такое возможно, только если $3^m - 1 = 2$ и $3^m + 1 = 4$. Отсюда $m = 1$ и тогда $t = 2, n = 3$. Подставляя найденные значения в (2) и (4), получаем решение:
$$x = 2, y = 5, t = 2.$$

Ответ: $(-1, -1, 0), (1, 2, 1), (2, 5, 2)$ (при условии $x \le y$).

5. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 & \text{(а)} \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 & \text{(б)} \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 & \text{(в)} \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 & \text{(г)} \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \mathrm{b}_2b_3 - b_1b_4$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

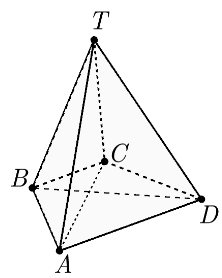
Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4b_4 = 1 - a_3b_2 = 1 - a_2b_3 = -6$.

Ответ: $a_4b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

6. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.



Решение: Объем пирамиды $TABCD$ равен сумме объемов пирамид $TBCD$ и $TABD$: $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TABD}$. Причем $V_{TABD} = V_{TACD}$, так как у пирамид $TABD$ и $TACD$ общая высота (из вершины T), а также равны площади оснований: $S_{ABD} = S_{ACD}$ (у этих треугольников общее основание BC и равные по длине высоты, проведенные из вершин B и C, поскольку $ABCD$ – трапеция по условию). Итак, $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TACD} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_1$.

Ответ: $\frac{S(r_1+r_2)}{3}$.

7. Дан треугольник ABC. На стороне AC выбирают точку Q таким образом, чтобы длина отрезка MK, где M и K – основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB и BC соответственно, оказалась минимальной. При этом $QM = 1$, $QK = \sqrt{2}$, $\angle B = 45^0$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Длины перпендикуляров, опущенных из точки Q основания AC, обозначим как d_1 и d_2; пусть $\angle B = \beta$. Четырехугольник $MBKQ$ вписан в окружность, и BQ ее диаметр. По формуле для радиуса описанной около треугольника MBK окружности имеем

$$BQ = MK/\sin\beta \;\Rightarrow MK = BQ\cdot\sin\beta. \qquad (1)$$

Поскольку величина угла β фиксирована, длина отрезка MK тем меньше, чем меньше длина BQ. Значит, точка Q – это основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AC, и BQ – высота (основание перпендикуляра Q лежит именно на стороне AC, а не на ее продолжении, так как углы A и C острые; если бы, скажем, угол A был тупым, то точка M оказалась бы на продолжении стороны AB, а не на ней самой); положим $BQ = h$. Найдем площадь ΔABQ, считая пока h известной величиной. Имеем$AQ = h/\sin\angle A = h/\sqrt{1-d_1^2/h^2}$. Тогда $S_{ABQ} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_1^2}}$. Аналогично, $S_{BQC} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_2^2}}$. Искомая площадь равна их сумме

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = \frac{h^4}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{h^2-d_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2-d_2^2}}\right). \qquad (2)$$

Остается найти h. Так как $h = BQ$, то из (1) следует, что $h = MK/\sin\beta$. Найдем MK из ΔMQK (в нем $\angle MQK = 180^0 - \beta$) по теореме косинусов: $MK^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\beta$. Итак,

$$h = MK/\sin\beta = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\beta}}{\sin\beta}.$$

Чтобы воспользоваться (2), прежде для удобства вычислим $h^2 - d_1^2 = \frac{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\beta-d_1^2\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{(d_1\cos\beta+d_2)^2}{\sin^2\beta}$. Аналогично, $h^2 - d_2^2 = \frac{(d_2\cos\beta+d_1)^2}{\sin^2\beta}$. Подставив полученные выражения в (2), находим $S_{ABC} = \frac{(d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\beta)^2}{2(d_1\cos\beta+d_2)(d_2\cos\beta+d_1)\sin\beta}$. Используя теперь числовые данные задачи, получаем ответ.

Ответ: $S_{ABC} = \frac{25}{6}$.

8. Найдите все неотрицательные целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$a^2 + b^2 = 841\cdot(ab+1).$$

Решение. Пусть пара чисел (a, b) удовлетворяет уравнению задачи:

$$a^2 + b^2 = k^2(ab+1), k = 29. \qquad (1)$$

Предположим, что одно из чисел, например a, равно нулю. Тогда, очевидно, $b = k$. Поэтому далее будем рассматривать такие решения (a, b) уравнения (1), для которых

$$a \neq 0, b \neq 0. \qquad (2)$$

Более того, будем предполагать, что

$$a \leq b. \qquad (3)$$

Итак, пусть пара (a_0, b_0) удовлетворяет (1), а также условиям (2), (3). Из (1) находим, что $b_0^2 - k^2a_0b_0 + a_0^2 - k^2 = 0$. Это равенство можно трактовать как квадратное уравнение относительно неизвестной b_0. По теореме Виета, помимо собственно b_0, это уравнение еще имеет корень b_0' такой, что

$$b_0 + b_0' = k^2 a_0, \qquad (4)$$

$$b_0 b_0' = a_0^2 - k^2. \qquad (5)$$

Утверждение. Этот новый корень b_0' удовлетворяет условиям: $b_0' \geq 0$, $b_0' \in \mathbb{Z}$ и $b_0' < a_0$.

Доказательство. Числа a_0 и b_0' удовлетворяют (1), поэтому $b_0' \geq 0$ (иначе правая часть (1) была бы отрицательной, так как, по условию задачи и в силу (2), $a_0 > 0$). Из (4) следует, что неотрицательное b_0' является целым, а из (5) – что $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$. Установим, что $b_0' < a_0$. Действительно, $b_0' < a_0 \Leftrightarrow \frac{a_0^2 - k^2}{b_0} < a_0 \Leftrightarrow a_0^2 - k^2 < a_0 b_0 \Leftarrow a_0^2 \leq a_0 b_0$. Последнее верно в силу (3).■

Таким образом, пара (a_0, b_0), удовлетворяющая уравнению (1) и ограничениям (2), (3), порождает новую пару (см. (4)) вида $(b_0', a_0) = (k^2 a_0 - b_0,\ a_0)$, которая также удовлетворяет (1), (2), (3) (если, конечно, $a_0 \neq k$; так как, согласно (5), b_0' еще может быть найден по формуле $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$, так что, если $a_0 = k$, то (3) не будет выполнено). Будем эту новую пару обозначать как (a_1, b_1). Затем по тем же формулам можно из пары (a_1, b_1) получить еще решение (a_2, b_2) и т.д. Символически полученный результат представим следующим образом:

$$(a_0, b_0) \to (a_1, b_1) = (k^2 a_0 - b_0, \quad a_0) \to (a_2, b_2) \to \cdots \qquad (6)$$

Здесь $a_m = k^2 a_{m-1} - b_{m-1}, b_m = a_{m-1}$, при этом $a_m > a_{m-1}$(см. утверждение) (7)

Сразу же отметим и формулы обратного преобразования

$$a_{m-1} = b_m, b_{m-1} = k^2 b_m - a_m, \qquad (7')$$

с помощью которых можно цепочку (6) продолжить влево. С помощью правила (7), из одного решения (a_0, b_0), удовлетворяющего (1), (2), (3), мы можем получить лишь конечное число новых решений уравнения (1), так как, согласно доказанному утверждению, $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots \geq 0$. Значит, на каком-то шаге обязательно получится $a_n = 0$ (тогда, как было показано выше, $b_n = k$). Чтобы на n-м шаге получить 0, на предыдущем шаге должно было быть $a_{n-1} = k$ (подставив $a = a_{n-1} = k$ в (1), найдем $b = b_{n-1} = k^3$). Таким образом, окончание цепочки (6) выглядит так:

$$\ldots \to (a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3) \to (a_n, b_n) = (0, k). \qquad (8)$$

(Цепочку (8) вправо продолжать смысла нет, так как далее $(0, k) \to (-k, 0) \to (0, k) \to \cdots$.) А вот что предшествует паре $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3)$? Согласно $(7')$, на предыдущем шаге $a_{n-2} = k^3$, $b_{n-2} = k^5 - k$ – и это тоже решение уравнения (1)! Можно продолжить, получая новые решения: $a_{n-2} = k^5 - k, b_{n-2} = k^7 - 2k^3$ и так далее. Значит, всего решений у уравнения (1) бесконечно много, так как цепочку (8) можно продолжить влево сколь угодно далеко.

Поясним почему (8) содержит *все решения* (1), удовлетворяющие условию (3). Пусть (a^*, b^*) – какое-то (удовлетворяющее (3)) решение уравнения (1). Было показано, что с помощью формул (7) из решения (a^*, b^*) можно получить цепочку новых решений (см. (6)), которая непременно закончится решением $(0, k)$. Но это и означает, что (a^*, b^*) содержится в (8), ведь, приняв теперь решение $(0, k)$ за отправную точку, мы с помощью обратных преобразований $(7')$ вернемся к (a^*, b^*) (а цепочка (8) именно так и устроена: начав с $(0, k)$, мы с помощью $(7')$ получаем ее всю).

Чтобы записать ответ несколько поменяем нумерацию: положим $(a_0, b_0) = (0, k)$ и двинемся с помощью $(7')$ по цепочке (8) влево (у нас будет $(a_1, b_1) = (k, k^3), (a_2, b_2) = (k^3, k^5 - k)$ и т.д.).

Ответ: Решениями (a, b) (при условии $a \leq b$) служат те и только те пары чисел (a_n, b_n), которые каждом $n \in \mathbb{N}$ вычисляются по формулам: $a_n = b_{n-1}, b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1}$, $a_0 = 0, b_0 = k$; здесь $k = 29$.