

10 КЛАСС

1. Действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют соотношениям:  
 $4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy$ .

Найдите максимум суммы  $a + b + c$ , где  $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$ .

**Решение.** Заметим, что

$$a - b + c = 0. \quad (1)$$

Обозначим  $A = 4x^2 - 2x - 30yz, B = 25y^2 + 5y + 12xz$  и  $C = 9z^2 - 3z - 20xy$ . Вычитая друг из друга эти равенства, получим

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что все три числа  $a, b, c$  отличны от нуля. Тогда  $2x - 6z - 5y - 1 = 0, 5y + 4x - 3z + 1 = 0$  и  $1 - 2x - 10y - 3z = 0$ , что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим  $3 = 0$ . Значит, хотя бы одно из чисел  $a, b, c$  равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа  $a, b, c$  равны нулю. Тройка  $a = b = c = 0$  очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять  $x = y = z = 0$ ).

2) Среди чисел  $a, b, c$  только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел  $a, b, c$  равно нулю:

- $a = 0$ . Тогда  $x = -\frac{5y}{2}$ . Из системы (2) находим  $b = c = 1$ ;
- $b = 0$ . Тогда  $a = -c = 1$ ;
- $c = 0$ . Тогда  $a = b = -1$ .

**Ответ:** 2.

2. Найдите значение  $f(2019)$ , если известно, что  $f(x)$  одновременно удовлетворяет трем условиям:

- 1)  $f(x) > 0$  для любого  $x > 0$ ;
- 2)  $f(1) = 1$ ;
- 3)  $f(a + b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Решение.** В тождестве из условия задачи

$$f(a + b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \quad (1)$$

положим  $a = 1, b = 0$ . Тогда  $f(1) \cdot (f(1) + f(0)) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$ . Поскольку  $f(1) = 1$ , находим

$$f(0) = 0. \quad (2)$$

Положив затем  $b = -a$  в (1), получим, с учетом (2), что

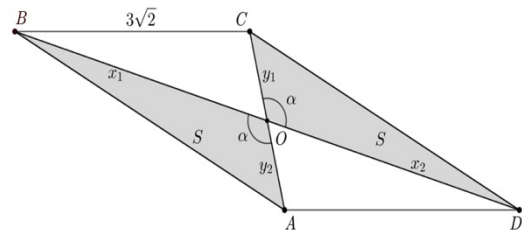
$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \quad (3)$$

Наконец, при  $b = 0$  тождество (1) (с учетом (2)) примет вид  $f(a) \cdot f(a) = a^2$ . Значит необходимо, чтобы  $f(a) = a$  при  $a > 0$ , так как по условию  $f(x) > 0$  для  $x > 0$ . Далее, согласно (3),  $f(a) = a$  и при  $a < 0$ . Окончательно,  $f(x) = x$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Легко убедиться, что такая  $f(x)$  действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи. Итак,  $f(x) = x$ .

**Ответ:** 2019.

3. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ ,  $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$ . Найдите наименьшую площадь, которую будет иметь такой четырехугольник.

**Решение.** Докажем, что четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Пусть  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через  $\alpha$ . По условию площади треугольников  $ABO$  и  $CDO$  равны, то есть  $\frac{1}{2}x_1y_2 \sin \alpha = \frac{1}{2}x_2y_1 \sin \alpha$ . Отсюда  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ , и, следовательно, треугольники  $BOC$  и  $AOD$  подобны по первому признаку подобия: две стороны ( $x_1$  и  $y_1$ ) треугольника  $BOC$  пропорциональны двум сторонам ( $x_2$  и  $y_2$ ) треугольника  $AOD$ , а углы, образованные этими сторонами ( $\angle BOC$  и  $\angle AOD$ ), равны. Пусть  $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$  – коэффициент подобия треугольников  $BOC$  и  $AOD$ .



Обозначим через  $S$  площади треугольников  $ABO$  и  $CDO$  (по условию  $S = \frac{3}{2}$ ). Тогда  $S_{BOC} = k \cdot S$  и  $S_{AOD} = S/k$ . В итоге, площадь четырехугольника  $ABCD$  может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S \left( k + \frac{1}{k} \right).$$

Известно, что для  $k > 0$  минимальное значение выражения  $k + \frac{1}{k}$  достигается при  $k = 1$ . Значит,  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ , то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому  $ABCD$  – параллелограмм. Его площадь  $S_{ABCD} = 4S = 6$ .

**Ответ:** 6.

4. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид 101010 ... 101 (единицы и нули чередуются).

**Решение.** Пусть  $2n + 1$  – количество цифр в исследуемом числе  $A = 101010 \dots 101$ .

Пусть  $q = 10$  – основание системы счисления. Тогда  $A = q^0 + q^2 + \dots + q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ . Рассмотрим случаи четного и нечетного  $n$ .

•  $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$ . Таким образом, число  $A$  представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен  $q^{2k+1} \pm 1$  делится без остатка на многочлен  $q \pm 1$ ), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных  $n$  число  $A$  простым не является.

•  $n = 2k - 1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k} + 1)$ . При  $k > 1$  оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число  $A$  составное. Остается убедиться, что при  $k = 1$  получается простое число  $A = q^0 + q^2 = 101$ .

**Ответ:** 101.

5. Обыкновенная дробь  $\frac{1}{221}$  представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби  $\frac{25687}{99900} = 0,25712712712 \dots = 0,25(712)$  равна 3.)

**Решение.** Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь  $\frac{34}{275}$  в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.).

В результате найдем  $\frac{34}{275} = 0,123636363 \dots = 0,123(63)$ .

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике**

Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби  $\frac{1}{221}$  ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби  $\frac{34}{275}$  цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают различные числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу  $r_1 = 65$  (остатку от деления на 275 числа 340). То есть  $10r_1 = 650$ . Аналогично,  $10r_2 = 1750$ , где  $r_2 = 175$ . Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело:  $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) : 275$ . Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби  $\frac{1}{221}$  непериодической части не будет: если  $r_1$  и  $r_2$  – это различные остатки от деления на 221, то произведение  $10(r_2 - r_1)$  на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

$$\begin{array}{r}
 -34 \quad | \quad 275 \\
 \hline
 275 \quad | \quad 0,12363\dots \\
 -650 \\
 \hline
 550 \\
 -550 \\
 \hline
 \boxed{100}0 \\
 -825 \\
 \hline
 1750 \\
 -1650 \\
 \hline
 \boxed{100}0 \\
 -825 \\
 \hline
 1750 \\
 - \dots
 \end{array}$$

Итак, десятичная запись дроби  $\frac{1}{221}$  имеет вид  $\frac{1}{221} = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$ . Найдем  $n$ . Обозначим  $A = a_1 a_2 \dots a_n$ . Тогда  $\frac{1}{221} = 10^{-n} \cdot A + 10^{-2n} \cdot A + \dots$ . По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$ . Отсюда  $A = \frac{10^n - 1}{221}$ . Поскольку  $A$  – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное  $n$ , при котором число  $10^n$  дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что  $221 = 13 \cdot 17$ . Вообще, целое число  $B$  (у нас  $B = 10^n$ ) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда  $B$  при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если  $B = 13k_1 + 1$  и  $B = 17k_2 + 1$ , то  $13k_1 = 17k_2$ , а значит число  $k_1$  делится на 17, то есть  $k_1 = 17m$ . Поэтому  $B = 13 \cdot 17m + 1$ , и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие  $n$ , что число  $10^n$  дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность  $b_n = 10^n$ . Заменяем ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что:  $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 3, b_4 = 4, b_5 = 1, \dots$  Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит,  $\{b_n\}$  – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же проделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при  $n = \text{НОК}(6,16) = 48$ .

**Ответ:** 48.

**6.** Известно, что длины сторон выпуклого четырёхугольника равны соответственно  $a = 4, b = 5, c = 6, d = 7$ . Найти радиус  $R$  окружности, описанной вокруг этого четырёхугольника. В качестве ответа привести целую часть  $R^2$ .

**Решение.** По теореме косинусов выразим длину диагонали:

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad l^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \gamma).$$

Отсюда получим  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$ . Поскольку  $R = \frac{l}{2 \sin \gamma}$ , получаем

$$R^2 = \frac{l^2}{4(1 - \cos^2 \gamma)}.$$

Для указанных длин сторон  $R^2 = \frac{2074799}{131040}$ .

**Ответ:** 15.

