10 КЛАСС

1. Решите уравнение $2^x + 2^y = 2^{xy-1}$ в целых числах.

Решение. Пусть сначала $x = y$. Тогда уравнение примет вид $2^x + 2^x = 2^{x^2-1}$.

Отсюда $2^{x+1} = 2^{x^2-1} \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -1$ или $x = 2$. Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим $y = x + n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $2^x + 2^{x+n} = 2^{xy-1} \Leftrightarrow 1 + 2^n = 2^{xy-1-x}$, что невозможно, так как левая часть – нечетное число, превосходящее 2, а правая часть либо четна (если $xy - 1 - x \geq 1$), либо не превосходит 2 (если $xy - 1 - x < 1$).

Ответ: $(-1,-1), (2,2)$.

2. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2,3. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение. Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием одной цифры справа к 99-значному числу. Известно, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть x – 99-значное число. К нему справа можно приписать только одним способом цифру 1,2 или 3, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Действительно, если x при делении на 3 дает остаток ноль, то припишем 3, если 1, то 2 и если 2, то 1. Таким образом, 100-значных чисел, кратных 3, ровно столько же сколько 99-значных чисел. Последних, очевидно, всего 3^{99}.

Ответ: 3^{99}.

3. Решите уравнение $\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение

$$sin^3x + sinxcosx(sinx + cosx) + 6cos^3x = 0;$$
$$sin^3x + sin^2xcosx + sinxcos^2x + 6cos^3x = 0.$$

Если $cosx = 0$, то подставляя в уравнение, получим $sinx = 0$, чего быть не может.
Разделим на cos^3x:

$$tg^3x + tg^2x + tgx + 6 = 0.$$

Сделаем замену $y = tgx$:

$$y^3 + y^2 + y + 6 = 0;$$
$$(y + 2)(y^2 - y + 3) = 0;$$
$$y = -2, tgx = -2, x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$$

Ответ: $x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z$.

4. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \quad (а) \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \quad (б) \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \quad (в) \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 \quad (г) \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$\boldsymbol{a_2 \cdot \Delta = b_2}. \qquad (\mathbf{2})$$

Здесь $\boldsymbol{\Delta = b_2 b_3 - b_1 b_4}$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2 b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4 b_4 = 1 - a_3 b_2 = 1 - a_2 b_3 = -6$.

Ответ: $a_4 b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

5. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют *целочисленной*, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. *Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.*

Решение. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до перестановки слагаемых способом, а именно: $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя[1]: $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа: $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$. Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежат 8 целочисленных точек: $(4,33), (33,4), (9,32), (32,9), (12,31), (31,12), (23,24), (24,23)$. Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

Ответ: Например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий. [1]Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что $5 = (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2$. Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично, $13 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$. В то же время число $65 = 5 \cdot 13$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных множителей представимо двумя способами:

$$5 \cdot 13 = (2 + 3i)(2 + i) \cdot (2 - 3i)(2 - i) = (1 + 8i) \cdot (1 - 8i) = 1^2 + 8^2$$

или

$$5 \cdot 13 = (2 - 3i)(2 + i) \cdot (2 + 3i)(2 - i) = (7 - 4i) \cdot (7 + 4i) = 7^2 + 4^2.$$

6. В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). *Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше 120^0. Сумма расстояний $AT+BT+CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом 120^0 (T – точка Торичелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен 120^0, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.*

Решение. Предположим, что у нашей системы дорог перекрестков нет, то есть имеется одна дорога, соединяющая последовательно вершины квадрата E, F, G и H. Тогда ее длина будет не меньше трех сторон квадрата (буквы «П» на рис. (а)), то есть не меньше 12 (дорога, соединяющая соседние вершины квадрата, не меньше его стороны).

Значит, искомая (а в идеале кратчайшая) система дорог должна иметь перекрестки (например, как на рис. (д)). Чтобы понять каким образом можно эффективно общую длину дорог уменьшать, полезно прежде обратить внимание на некоторые свойства, которыми *кратчайшая система дорог* обязана обладать:

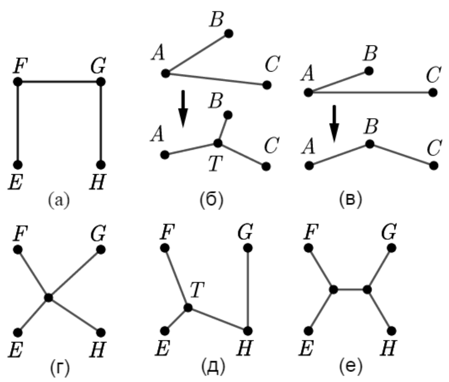
i. Кратчайшая система дорог состоит из отрезков, соединяющих перекрестки и вершины квадрата. Это очевидно, поскольку кратчайшим путем из одной точки в другую является отрезок прямой. Отметим без доказательства, хотя и это почти очевидно, что для любой системы городов кратчайшая система дорог их соединяющая – это связный граф без замкнутых путей, ребрами которого служат отрезки.

ii. Каждый перекресток должен быть соединен минимум с тремя вершинами графа (вершинами квадрата или перекрестками). (Если он соединен только с двумя, то смысла в нем немного: его можно удалить, а эти две вершины соединить напрямую; получится короче.)

iii. Угол между любыми двумя дорогами, выходящими из одного перекрестка (или из одной вершины квадрата) не может быть меньше 120^0. Действительно, пусть из точки A выходят дороги AB и AC, и угол BAC меньше 120^0. Тогда дороги AB и AC можно заменить дорогами с меньшей суммарной длиной. Если в треугольнике ABC все внутренние углы меньше 120^0, тот дороги AB и AC заменим на дороги TA, TB и TC, где T – точка Торичелли ABC (рис. (б)). Если же, например, угол B больше 120^0, то AB и AC заменим на AB и BC (рис. (в)).

iv. Из одного перекрестка выходят ровно три дороги под углами 120^0 (иначе длина дорог может быть уменьшена). Это немедленно следует из свойств (ii) и (iii).

Предположим, что система дорог обладает одним перекрестком. Если он соединен со всеми вершинами рис. (г), то длина дорог не меньше суммы диагоналей, которая равна $8\sqrt{2} > 11$. Если же он соединен только с тремя вершинами (рис. (д)), то T – точка Торичелли треугольника EFH, вершина G соединена с F. В этом случае длина дорог приблизительно равна 11,7. Более того, нарушено свойство (iii), так как $\angle THG < 120^0$, а значит длину дорог можно уменьшить, добавив еще один перекресток (как в случае на рис. (б)).



Пусть перекрестков два. Из соображений симметрии расположим их на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (е)) так, чтобы из каждого перекрестка дороги выходили под углами 120^0 (свойство (iv)). В этом случае суммарная длина дорог равна $4 \cdot (\sqrt{3}+1) < 10{,}92$.

Ответ: Например, система дорог с двумя перекрестками на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (e)). Из каждого перекрестка дороги выходят под углами 120^0. Их суммарная длина равна $4 \cdot (\sqrt{3}+1) < 11$.

Комментарий. Система дорог на рис. (e) называемая *сетью Штейнера* данных четырех точек, вершин квадрата E, F, G и H. Без доказательства отметим, что эта система имеет минимальную длину из всех возможных.

7. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0), B(1424233, 2848467), C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

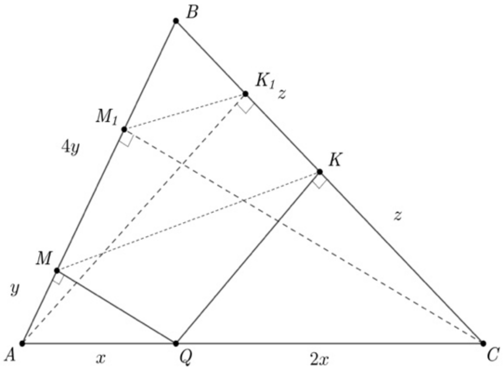
Решение. Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно $BC = \sqrt{5}$. Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $1/\sqrt{5}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,50.

8. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что $AQ:QC = 1:2$. Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом $BM:MA = 4:1, BK = KC$. Найдите $MK:AC$.

Решение. Проведем высоты AK_1 и CM_1. Идея решения в следующем: покажем, что треугольники M_1BK_1, MBK и ABC друг другу подобны; отсюда будет легко найти требуемое отношение.



Обозначим длины:

$AQ = x,\ QC = 2x, CK = z,\ KB = z,\ BM = 4y,\ MA = y.$

Из подобия треугольников AK_1C и QKC находим

$$KK_1 = КС \cdot AQ/QC = z/2.$$

Аналогично, так как $\Delta AQM \sim \Delta ACM_1$, то

$$MM_1 = QC \cdot AM/AQ = 2y.$$

Таким образом, так как $BK_1 = KK_1$ и $MM_1 = M_1B$, то $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta MBK$ с коэффициентом подобия 2 (их общий угол лежит между пропорциональными сторонами). Хорошо известно, что треугольник, образованный двумя основаниями высот и вершиной, подобен исходному, а именно: $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle B$. Значит, $M_1K_1 : AC = \cos\angle B$ и тогда:

$$MK:AC = 2\cos\angle B. \qquad (1)$$

Остается вычислить $\cos\angle B$. Площади подобных треугольников ΔM_1BK_1 и ΔABC относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{BM_1 \cdot BK_1}{BA \cdot BC} = \frac{2y \cdot \frac{z}{2}}{5y \cdot 2z} = \cos^2\angle B.$$

Отсюда $\cos\angle B = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Подставив найденное значение в (1), получаем ответ.

Ответ: $MK:AC = \frac{2}{\sqrt{10}}$.