Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

11 КЛАСС

1. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям
1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$;
2) $f(1) = 1$;
3) $f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + +a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Найдите какие-нибудь целые числа A и B, для которых выполняется неравенство

$$0{,}999 < A + B \cdot \sqrt{2} < 1.$$

3. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Боря (не зная расположение корабля Ани) производит «выстрел»: он называет два различных натуральных числа k и m от 1 до 29, и, если отрезок с концами в точках с номерами k и m, совпадает с одной из сторон треугольника Ани, то корабль считается «раненым». Сможет ли Боря, играя обдуманно, гарантированно «ранить» корабль, где бы Аня его ни расположила, сделав не более 134 выстрелов?

4. Известно, что уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ имеет единственный действительный корень x . Придумайте хотя бы одно уравнение вида

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d = 0,$$

где a, b, c, d – целые числа и $a \neq 0$, одним из корней которого было бы число

$$z = x_0^2 + 3 \cdot x_0 + 1.$$

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos\angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

6. Найдите все простые числа, запись которых в системе счисления с основанием 14 имеет вид $101010\ldots101$ (единицы и нули чередуются).

7. Докажите, что для всех $x \in \left(0,\ \frac{3\pi}{8}\right)$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{8x}{3}} > \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin 2x}.$$

Указание: воспользуйтесь выпуклостью вниз графика функции $f(t) = \frac{1}{\sin t}$ на интервале $(0;\ \pi)$

8. В каждую из k ячеек квадратной таблицы $n \times n$ записана единица, а в остальные ячейки – ноль. Найдите максимальное значение k, при котором, независимо от исходного расположения единиц, меняя местами строки между собой и столбцы между собой, можно добиться того, что все единицы окажутся выше побочной диагонали или на ней? (Побочной называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол. На рисунке приведен пример: содержимое ячеек, лежащих выше побочной диагонали или на ней, отмечено жирным.)