11 КЛАСС

1. Сколько решений уравнения $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$ попадает в круг $x^2 + y^2 \leq 100$?

Решение. Левую часть уравнения будем интерпретировать как квадратный трехчлен относительно x. Чтобы корни существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D = 4sin^2(x \cdot y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow sin^2(x \cdot y) = 1 \Leftrightarrow \cos 2xy = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для четных n получаем уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, а для нечетных n находим $x = -1$. Левая часть уравнения – четная функция x, поэтому для $x = 1$ и для $x = -1$ соответствующие значения y будут одними и теми же. Решение имеет вид $(x, y) = \left(\pm 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. В круг $x^2 + y^2 \leq 100$ попадает только 6 решений.

Ответ: 6.

2. Сколькими способами из первых 1000 натуральных чисел $1, 2, \ldots, 1000$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Найдём формулу для вычисления числа способов из первых n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \leq n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n-3) + (n-6) + \cdots + (n-3k) = \frac{(2n-3k-3)k}{2}, \text{где } k = d_{max}.$$

При $n = 1000$ имеем $k = 333$ и число способов равно 166167

Ответ: 166167.

3. Известно, что многочлен $f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Многочлен вида $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x^4$ имеет корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$. Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^4.$$

Тогда по условию задачи имеем

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$
$$= (x^2 - x_1{}^2)(x^2 - x_2{}^2)(x^2 - x_3{}^2)(x^2 - x_4{}^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - x_1{}^2)(y - x_2{}^2)(y - x_3{}^2)(y - x_4{}^2).$$

В нашем случае

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4,$$
$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$g(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$

$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216.

4. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2+(y-13)^2}+\sqrt{(x-18)^2+(y-4)^2}=15 \\ (x-2a)^2+(y-4a)^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение системы задает ГМТ точек $M(x,y)$ на плоскости сумма расстояниийот которых до точек $A(6,13)$ и $B(18,4)$ равна 15. Заметим, что

$$|AB| = \sqrt{12^2+9^2} = 15.$$

Поэтому согласно неравенству треугольника, ГМТ таких точек $M(x,y)$ суть точки отрезка AB.

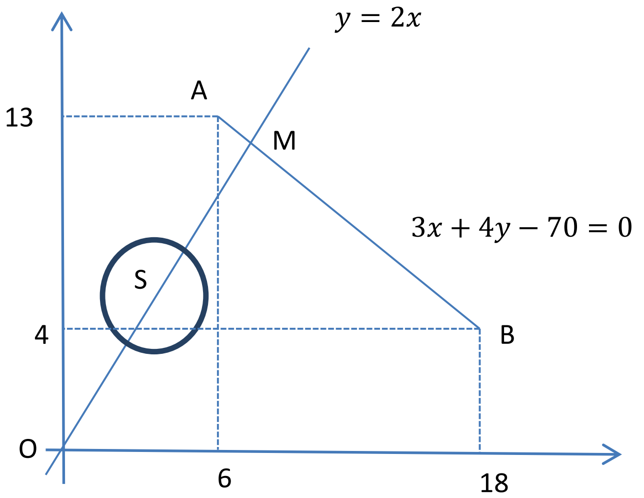
Второе уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $S(2a,4a)$ радиуса $\frac{1}{2}$.

Единственность решения системы возможна в том и только в том случае, когда окружность пересекает отрезок AB ровно в одной точке.

Очевидно, что гарантированно единственная точка пересечения будет в случае касания окружности отрезком. Это произойдет тогда, когда расстояние от точки $S(2a,4a)$ до прямой, содержащей отрезок AB, будет равно радиусу окружности, и точка касания будет попадать в отрезок AB. Уравнение прямой, содержащей AB, как нетрудно установить, имеет вид $3x+4y-70=0$. Согласно формуле расстояния от точки до прямой (один из вариантов решения):

$$\frac{|3\cdot 2a+4\cdot 4a-70|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получим два возможных значения параметра a:



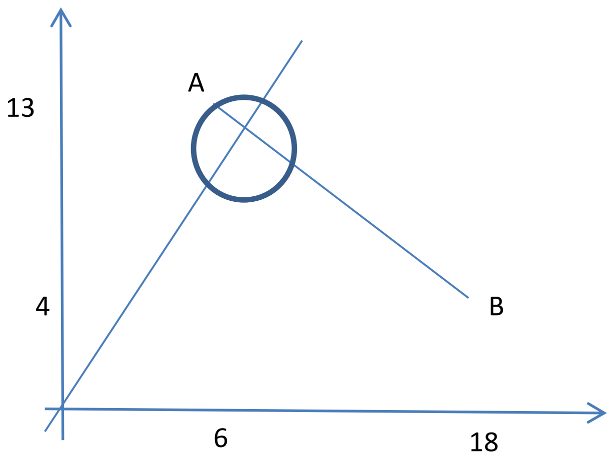
$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{145}{44}, \\ a &= \frac{135}{44}. \end{aligned}\right.$$

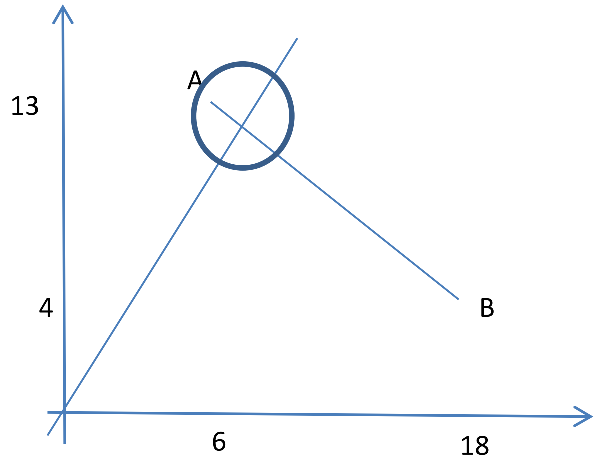
Центр окружности лежит на прямой $y=2x$.Точка $M\left(\frac{70}{11},\frac{140}{11}\right)$ пересечения прямых $y=2x$ и $3x+4y-70=0$ лежит на отрезке AB. Угол OMBострый, поэтому точка касания прямой $3x+4y-70=0$

и окружности, центр которой лежит под отрезком AB, заведомо на отрезок AB попадет. Это происходит при $a=\frac{135}{44}$. Если же цент S окружности лежит выше отрезка AB (это происходит при $a=\frac{145}{44}$), то требуются дополнительные рассуждения. Точка касания Hесть проекция точки $S\left(\frac{145}{22},\frac{145}{11}\right)$на прямую, содержащую отрезок AB. H попадет в отрезок AM, если $MH\le AM$. Имеем:

$$MH=\sqrt{SM^2-SH^2}=\sqrt{\left(\frac{145}{22}-\frac{70}{11}\right)^2+\left(\frac{145}{11}-\frac{140}{11}\right)^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{11},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{70}{11}-6\right)^2+\left(\frac{140}{11}-13\right)^2}=\frac{5}{11}.$$





Следовательно $MH<AM$, и точка касания H лежит на отрезке AB.

В то же время, поскольку $AM<\frac{1}{2}$, постольку единственность решения возможна, когда окружность пересекает отрезок AB, но при этом точка A попадает во внутрь круга. Так будет происходить с момента пересечения окружности и отрезка в точке A до момента повторного пересечения в той же точке A (не включая данные моменты).

Найдем такие положения точки $S(2a,4a)$, при которых расстояние от нее до точки A равно $\frac{1}{2}$. Имеем:

$$(2a-6)^2+(4a-13)^2=\frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{13}{4}, \\ a=\frac{63}{20}. \end{array}\right.$$

Значит, при $a\in\left(\frac{63}{20},\frac{13}{4}\right)$точка пересечения будет единственна, как и решение системы уравнений.

Ответ: $135/44$.

5. В треугольнике ABC стороны $AB=4, BC=6$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, при этом прямые AM и AC перпендикулярны. Найти MA, если радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности равен 9.

Решение. Введём систему координат с началом в точке A так, чтобы точка C лежала на оси абсцисс. Из условия задачи точка M лежит на оси ординат. Введём для неизвестных координат обозначения: $A(0,0), B(x_B,y_B), C(x_C,0), M(0,y_M)$. Обозначим через N середину AB и через O центр описанной окружности, тогда $N(\frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2})$ и $O\left(\frac{x_C}{2}, y_O\right)$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ следует, что $x_B \frac{x_B}{2} + y_B\left(y_M - \frac{y_B}{2}\right) = 0$. Откуда, учитывая $AB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 16$, получаем $y_M = \frac{8}{y_b}$. Из перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MO}$ следует, что $x_B \frac{x_C}{2} + y_B(y_M - y_O) = 0$. Кроме этого $BC^2 = (x_B - x_C)^2 + y_B^2 = 36$ и $AO^2 = \left(\frac{x_C}{2}\right)^2 + y_0^2 = 81$. Этих уравнений достаточно, чтобы получить $MA = |y_M| = 6$.

Ответ: 6.