**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций**

# 11 КЛАСС

## Вариант 1

**1.** Решите уравнение $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$.

**2.** Натуральные числа от 1 до 100 записали подряд без пробелов. Затем, между некоторыми цифрами поместили знак плюс. (Например, $1234567 + 891011 \ldots 15 + 1617 \ldots 99100.$) Может ли получившаяся в результате сумма делиться на 111?

**3.** Сравните числа $(10^{2017} + 10^{2016} + \cdots + 10 + 1)^{2018}$ и $(10^{2018} + 10^{2017} + \cdots + 10 + 1)^{2017}$.

**4.** Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник $ABC$ со стороной 4. Известно, что для произвольной точки $M$ на продолжении высоты пирамиды $SH$ (точка $S$ находится между точками $M$ и $H$) углы $MSA, MSB, MSC, ASB, ASC$ и $BSC$ равны между собой. Построен шар радиуса 1 с центром в точке $S$. Найдите объём общей части пирамиды $SABC$ и шара (объём шара радиуса $R$ вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

**5.** Докажите, что для любого натурального числа $n$ существует натуральное число $N$ такое, что произведение $9 \cdot 5^n \cdot N$ представляет собой *палиндром*, то есть число, десятичная запись которого справа налево и слева направо читается одинаково. Например, для $n = 1$ можно взять $N = 13$, так как $9 \cdot 5^1 \cdot 13 = 585$.

**6.** При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + (y-13)^2} + \sqrt{(x-18)^2 + (y-4)^2} = 15 \\ (x-2a)^2 + (y-4a)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

**7.** Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках $A, B, C, D$. Докажите, что сумма длин дуг $\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}$ больше суммы длин дуг $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}$.

**8.** Известно, что для любого натурального числа $n$ верна формула:

$$\cos(n\alpha) = 2^{n-1} \cdot (cos\alpha)^n + a_{n-1} \cdot (cos\alpha)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (cos\alpha)^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot (cos\alpha) + a_0.$$

Здесь $a_k$ – целые числа, и $a_0 = 0$ при нечётном $n$. Докажите, что при $n \geq 4$ числа $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррациональны.