ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

11 КЛАСС

Вариант 1

1. Известно, что уравнение $x^4-8x^3+ax^2+bx+16=0$ имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите *a* - *b*.

Решение: Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 − корни нашего уравнения (возможно, среди них есть одинаковые). Следовательно, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8,\quad x_1x_2x_3x_4=16.$$

Известно, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, но в нашем случае они равны:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=2.$$

Следовательно, $x_1=x_2=x_3=x_4=2,$ и

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16=(x-2)^4.$$

Отсюда $a=24, b=-32.$

Ответ: 56

2. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках B – 20% раствор и в C – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a*,*b* и *c* штук. По условию $0,1a+0,2b+0,9c=0,2017\cdot(a+b+c)\Leftrightarrow 1000\cdot(a+2b+9c)=2017\cdot(a+b+c).$ Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a*,*b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\ b\le 500,\ c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17,\ b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517,\ 8c\ge 518,\ c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответсвующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: **73**

3. Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$– сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

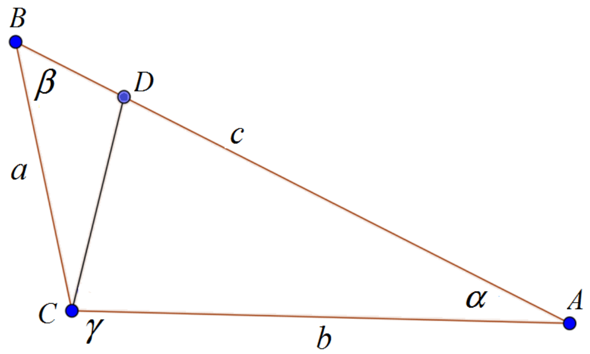
Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right)$ и

$\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots p^{2k}$. Поскольку $1800=2^3\cdot3^2\cdot5^2$, то

$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$

Ответ: 5035485.

4. В треугольнике со сторонами a,b,c и углами α,β,γ выполнено равенство $3\alpha+2\beta=180^0$. Стороны a,b,c лежат соответственно напротив углов α,β,γ. Найти длину стороны c при $a=2,b=3$



Решение: Из условия следует, что $c>b$. Найдем на отрезке AB точку Dтакую, что $AC=AD$. Тогда треугольник ACDравнобедренный и $\angle ACD=\angle ADC=90°-\alpha/2$.Угол ADC – внешний угол треугольника CBD. Значит, $\angle BCD+\beta=\angle ADC=90°-\frac{\alpha}{2}=\alpha+\beta$. Значит $\angle BCD=\alpha$, и треугольникиCDи ABCподобны. Имеем $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a}=\frac{a}{c}$, откуда следует $a^2+bc-c^2=0$. Квадратное уравнение $c^2-3c-4=0$ имеет единственный положительный корень $c=4$.

Ответ: 4.

5. Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.Многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+x^4$ имеет корни $\{x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2\}$. Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)$=$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$.

Тогда по условию задачи имеем:

$f(x)$= $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$:

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$
$$= (x^2 - x_1{}^2)(x^2 - x_2{}^2)(x^2 - x_3{}^2)(x^2 - x_4{}^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - x_1{}^2)(y - x_2{}^2)(y - x_3{}^2)(y - x_4{}^2).$$

В нашем случае: $f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$,

$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$g(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$
$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216

6. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

1) матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, где каждая * может принимать значение 0 или 1

2) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A, состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B. Пусть $A_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j,$ – подмножество множества A, состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j. Тогда $B = A \setminus (A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13})$ и $|B| = |A| - |A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$.Мощность $|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$$|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}| = |A_{12}| + |A_{23}| + |A_{13}| - |A_{12} \cap A_{23}| - |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}| + |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}|.$$

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$$|A_{12}| = |A_{23}| = |A_{13}| = 2^3,\ |A_{12} \cap A_{23}| = |A_{13} \cap A_{23}| = |A_{12} \cap A_{13}| = |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}| = 1.$$

Получим $|B| = 2^6 - 3 \cdot 2^3 + 3 - 1 = 42$.

Ответ: 42