

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Воспользовавшись правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную, а также формулой для суммы первых 2017 членов арифметической прогрессии, найдем

$$0,(0001)+0,(0002)+\dots \quad \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 2017 & 1000 \cdot 2017 \\ 9999 & 9999 & \dots & 9999 & 9999 \end{matrix} = \frac{2035153}{9999}.$$

Ответ: $\frac{2035153}{9999}$.

Задача 2

Рассмотрим уравнение $Axy + Bxz + Cyz = N$. Пусть числа A и B взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа y и z , что $Ay + Bz = 1$. Следовательно, $x = N - Cyz$. Поэтому наше уравнение имеет следующее решение в целых числах: $y = -5$, $z = 3$, $x = N + 27 \cdot 3 \cdot 5$. Утверждение доказано.

Задача 3

Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3 : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$. Тогда по условию задачи имеем:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$:

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = \\ = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - x_4^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2)(y - x_4^2).$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4, \\ h(x) &= 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4, \\ G(x) &= f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8, \\ g(y) &= 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4. \end{aligned}$$

Ответ: $g(x) = 64 - 1216x + 416x^2 - 40x^3 + x^4$.

Задача 4

Пусть пробирок вида A , B и C взяли соответственно a, b и c штук. По условию $0,1a + 0,2b + 0,9c = 0,2017 \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow 1000 \cdot (a + 2b + 9c) = 2017 \cdot (a + b + c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a + b + c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа a, b и c такие, что

$$\begin{cases} a + b + c = 1000 \\ a + 2b + 9c = 2017 \\ a \leq 500, b \leq 500, c \leq 500. \end{cases} \quad (1)$$

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях. Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a = 7c - 17, b = 1017 - 8c. \quad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c \leq 517, 8c \geq 518, c \leq 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответствующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: Наименьшее количество переливаний равно **1000**. При этом могут быть использованы максимум **73** пробирки вида C .

Задача 5

Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N . Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b . И наоборот: умножив делитель a на делитель b , получим делитель произведения ab . Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$. Здесь p_i – попарно различные простые числа, и все $k_i \in \mathbb{N}$. Тогда $\sigma(N) = \sigma(p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_r^{k_r})$ и $\sigma(p^k) = 1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2k}$. Поскольку $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, то

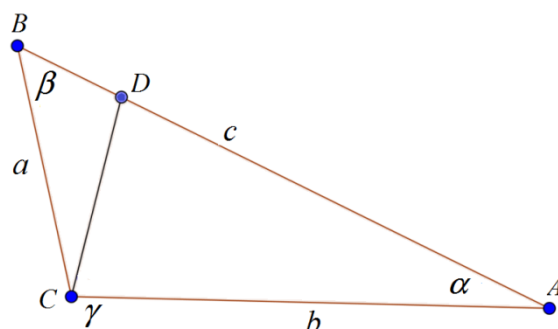
$$\sigma(1800) = (1 + 2^2 + 2^4 + 2^6) \cdot (1 + 3^2 + 3^4) \cdot (1 + 5^2 + 5^4) = 5035485.$$

Ответ: 5035485.

Задача 6

Из условия следует, что $c > b$. Найдем на отрезке AB точку D такую, что $AC = AD$. Тогда треугольник ACD равнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC = 90^\circ - \alpha/2$. Угол ADC – внешний угол треугольника CBD . Значит, $\angle BCD + \beta = \angle ADC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta$.

Значит $\angle BCD = \alpha$, и треугольники BCD и ABC подобны. Имеем $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a} = \frac{a}{c}$, откуда следует искомое соотношение.



Задача 7

Покажем, что для любого натурального числа n существует натуральное число N , делящееся нацело на n , сумма цифр которого равна n . Действительно, рассмотрим числа вида 10^k , $k = 0, 1, \dots$ а именно: 1, 10, 100, 1000, ... Среди этих чисел выберем n чисел, имеющих одинаковые остатки от деления на n (это можно сделать, поскольку чисел вида 10^k бесконечно много, а остатков от деления на n ровно n). В качестве искомого N возьмем сумму этих n чисел. Утверждение доказано.

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

Задача 8

Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2$, что для таблиц А и В не выполнено. Поэтому указанным способом получить таблицу В из таблицы А нельзя.

Таблица 1

a_1	b_1
c_1	d_1

Таблица 2

a_2	b_2
c_2	d_2

Ответ: Нельзя.