Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

10 КЛАСС

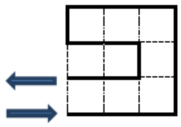
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 9 минут, а сноубордист – за 7 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 17:45. Определите время подъёма от подножия до вершины.

2. Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=41$.

3. Найдите натуральное число *n*, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2*n*-1.

4. На плоскости изображён квадрат *n*x*n* клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении *n* и невозможно ни при каком чётном *n*.



5. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число *N* такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где *A* – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – цифры от 0 до 9.

6. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с длинами катетов *a*, *b*, гипотенузой *c* и углами α, β (α напротив стороны *a*, β – напротив *b*) выполняется равенство $a^2-2ac\cos(60^0+\beta)=b^2-2bc\cos(60^0+\alpha)$.

7. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

Найдите сумму первых 550 членов этой последовательности.

8. Найдите три каких-нибудь натуральных числа *a*, *b*, *c*, удовлетворяющих равенству $a^3+b^{2016}=c^5$.