Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим время подъема от подножия до вершины горы через x. Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 130 минут. Значит, впервые на вершине горы они встретятся через 130 + x минут. В таком случае x – это такое минимальное натуральное число, что (5+ x) - делитель (130 + x) и (10+ x) - делитель (130 + x). Перебором устанавливаем, что $x = 20$.

Ответ: 20.

Задача 2

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит, модуль разности корней первого трехчлена равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1,5)^2-18,25\right)\left((x+3,5)^2-18,25\right)=41.$$

Замена $x=y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2-18,25\right)\left((y+1)^2-18,25\right)=41\Leftrightarrow\left(\left(y^2-17,25\right)-2y\right)\left(\left(y^2-17,25\right)+2y\right)=41\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-17,25\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

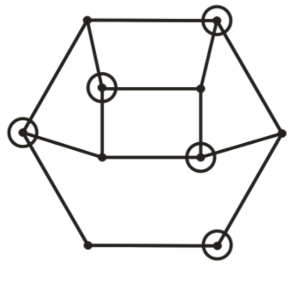
Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{77+4\sqrt{114}}}{2}$, $\dfrac{-5\pm\sqrt{77-4\sqrt{114}}}{2}$.

Задача 3

Сумма делителей числа $n=2^k$ равна $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=2n-1$. Ближайшее число вида $n=2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

Ответ: 1024.

Задача 4



Выделим некоторые вершины графа, обведя их в кружочек. Изначально, один из автомобилей находится в выделенной вершине, а второй нет. Из выделенной вершины можно попасть только в невыделенную и наоборот (двудольный граф). Поэтому в одной вершине автомобили оказаться не могут.

Задача 5

По условию существует натуральное n такое, что $n^2<N<(n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное a такое, что $N=n^2+a,\ a\in(0;2n+1)$. Далее, $n^2<n^2+a<(n+1)^2\Leftrightarrow\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+a}<\sqrt{(n+1)^2}\Leftrightarrow 0<\sqrt{n^2+a}-n<1$. Следовательно, дробная часть числа $\sqrt{N}$ равна $\sqrt{n^2+a}-n.$ Остается найти минимальное натуральное n, для которого существует натуральное $a \in (0;2n+1)$ такое, что

$$\sqrt{n^2+a}-n<\frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2+a}<\frac{1}{100}+n \Leftrightarrow a<\frac{1}{10^4}+\frac{n}{50}$. Минимальное n равно, очевидно, 50, и тогда $a=1$. Следовательно, $N=n^2+a=2501.$

Ответ: 2501.

Задача 6

У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 3600 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть c_9 – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, c_{18} – количество чисел с суммой цифр 18, c_{27} – количество чисел с суммой цифр 27.

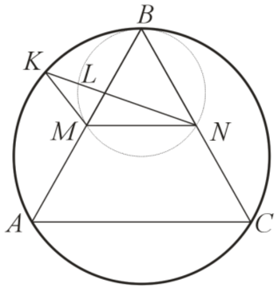
Вычислим c_9. Будем все числа трактовать как четырехзначные: 9=0009, 18=0018, … Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним, сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9=m_1+m_2+m_3$. Прибавим к обеим частям число 3: $12=(m_1+1)+(m_2+1)+(m_3+1)$. Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно C_{11}^2. Действительно, представим себе на числовой прямой числа 1,2,…,12. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых. Аналогично, имеется C_{10}^2 чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, C_9^2 чисел $2m_1m_2m_3$ и, наконец, C_8^2 чисел $3m_1m_2m_3$. Заметим, что при подсчете количества чисел вида $3m_1m_2m_3$ выполняется равенство $6=m_1+m_2+m_3$, поэтому рассматриваемые числа $3m_1m_2m_3$ будут автоматически не больше, чем 3600. В итоге, $c_9=C_{11}^2+C_{10}^2+C_9^2+C_8^2=164.$

Затем непосредственным подсчетом находим $c_{27}=10,$ и, следовательно, $c_{18}=226.$ Для получения ответа остается вычислить $9c_9+18c_{18}+27c_{27}$.

Ответ: 5814.

Задача 7

Опишем окружность вокруг треугольника *BMN*. Она касается внутренним образом в точке *B* описанной около треугольника *ABC* окружности, поскольку точка *B* и центры окружностей лежат на одной прямой. Пусть сначала точка *K* лежит выше горизонтальной прямой *MN*. Пусть *L* – точка пересечения отрезка *KN* и меньшей окружности. Угол *MLN* равен 60^0, и, следовательно, угол *KLM* равен 120^0. Значит, угол *MKN* не превосходит 60^0. Заметим, что в приведенном рассуждении не играет никакой роли то обстоятельство, что



точка K лежит на окружности. Важно лишь, что она находится выше прямой MN и вне окружности, описанной около треугольника BMN.

Пусть теперь точка K расположена ниже прямой MN (этот случай на рисунке не отражен). Рассмотрим точку K_1, симметричную точке K относительно прямой MN. Углы MK_1N и MKN, очевидно, равны. Точка K_1 лежит выше прямой MN и вне меньшей окружности. По доказанному, угол MK_1N не превосходит 60^0. Утверждение доказано полностью.

Задача 8

Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа a, b, c будем искать в виде $a = 2^k, b = 2^l, c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели k, l, m так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

Ответ: например, $a = 2^{2688}, b = 2^4, c = 2^{1613}$.