Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим время подъема от подножия до вершины горы через x. Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 345 минуты. Значит впервые на вершине горы они встретятся через 345 + x минут. В таком случае x – это такое минимальное натуральное число, что (7+ x) - делитель (345 + x) и (9+ x) - делитель (345+ x). Перебором устанавливаем, что $x = 19$.

Ответ: 19.

Задача 2

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1,5)^2+3,75\right)\left((x+3,5)^2+3,75\right)=41.$$

Замена $x=y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2+3,75\right)\left((y+1)^2+3,75\right)=41\Leftrightarrow\left(\left(y^2+4,75\right)-2y\right)\left(\left(y^2+4,75\right)+2y\right)=41\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2+4,75\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{-11+4\sqrt{26}}}{2}$.

Задача 3

Сумма делителей числа $n=2^k$ равна $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=2n-1$. Ближайшее число вида $n=2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

Ответ. 512.

Задача 4

Если n – нечётное, то, например, возможна укладка “змейкой” по аналогии с рисунком в условии задачи. Если n – чётное, то количество узлов равно $(n+1)$x$(n+1)$ – нечётное число. Раскрасим узлы в черный белый цвет так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом оного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но тогда такой маршрут имеет чётную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

Задача 5

По условию существует натуральное n такое, что $n^2<N<(n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное a такое, что $N=n^2+a,\ a\in(0;2n+1)$. Далее,

$n^2 < n^2 + a < (n+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+a} < \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{n^2+a} - n < 1.$ Следовательно, дробная часть числа $\sqrt{N}$ равна $\sqrt{n^2+a} - n.$ Остается найти минимальное натуральное n, для которого существует натуральное $a \in (0; 2n+1)$ такое, что

$$\sqrt{n^2+a} - n < \frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2+a} < \frac{1}{100} + n \Leftrightarrow a < \frac{1}{10^4} + \frac{n}{50}.$ Минимальное n равно, очевидно, 50, и тогда $a = 1.$ Следовательно, $N = n^2 + a = 2501.$

Ответ: 2501.

Задача 6

Преобразуем косинус суммы двух углов:

$$a^2 - ac\left(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta\right) = b^2 - bc\left(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ac\sin\beta$ и $\sqrt{3}bc\sin\alpha$ равны друг другу (т.к. оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2 - ac\cos\beta = b^2 - bc\cos\alpha.$$

Последнее очевидно, поскольку $c\cos\beta = a$ и $c\cos\alpha = b.$ Равенство доказано.

Задача 7

У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 4950 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть c_9 – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, c_{18} – количество чисел с суммой цифр 18, c_{27} – количество чисел с суммой цифр 27.

Вычислим c_9. Будем все числа трактовать как четырехзначные: 9=0009, 18=0018, … Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним, сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9 = m_1 + m_2 + m_3.$ Прибавим к обеим частям число 3: $12 = (m_1+1) + (m_2+1) + (m_3+1).$ Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно $C_{11}^2.$ Действительно, представим себе на числовой прямой числа 1,2,…,12. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых. Аналогично, имеется C_{10}^2 чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, C_9^2 чисел $2m_1m_2m_3$, C_8^2 чисел $3m_1m_2m_3$, и, наконец, C_7^2 чисел вида $4m_1m_2m_3$. В итоге, $c_9 = C_{11}^2 + C_{10}^2 + C_9^2 + C_8^2 + C_7^2 = 185.$

Затем нетрудно найти, что $c_{27} = 30,$ и, следовательно, $c_{18} = 335.$ Для получения ответа остается вычислить $9c_9 + 18c_{18} + 27c_{27}.$

Ответ: 8505.

Задача 8

Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа a, b, c будем искать в виде $a = 2^k, b = 2^l, c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели k, l, m так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

Ответ: например, $a = 2^{2688}, b = 2^4, c = 2^{1613}$.