

УСЛОВИЯ И ОТВЕТЫ ЗАДАЧ ОЧНОГО ЭТАПА

11 КЛАСС

1. (12 баллов) Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m , больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a, b, c называют попарно взаимно простыми, если никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7, 8, 15 попарно взаимно просты, а числа 5, 8, 15 – нет.)
2. (12 баллов) Даны три числа a, b, c такие, что $a + b + c = 1$ и $a, b, c \geq 0$. Докажите, что $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9}$.
3. (12 баллов) Уравнения $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.

4. (12 баллов) Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n > 2015$ и $[\sqrt{9n+2}] \neq [\sqrt{9n+4}]$.

Здесь скобки $[]$ обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[3,7]=3$.)

5. (12 баллов) Имеется n целых чисел $0, 1, 2, \dots, n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую перестановку (i_1, i_2, \dots, i_n) . Из исходного набора чисел $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ и этой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) получим новый набор чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) по правилу: $a_1 = r_n(0+i_1), a_2 = r_n(1+i_2), \dots, a_n = r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n . (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора $(0, 1, 2)$ и перестановки $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 0)$ получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 2)$, т.к. $r_3(0+1)=1, r_3(1+2)=0, r_3(2+0)=2$.)

а) При $n = 9$ приведите пример такой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_9) , что в соответствующем наборе (a_1, a_2, \dots, a_9) все числа различны;

б) докажите, что, если $n = 10$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \dots, i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

6. (14 баллов) Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую. После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.



-1 тип



- 2 тип

7. (12 баллов) Найдите значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$, если известно, что числа a, b, c

$$\text{удовлетворяют соотношениям: } \begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$$

8. (14 баллов) В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 30° . Найдите угловую меру дуги B_1C_1 .

