Ответы (решения) задач очного этапа

11 КЛАСС

1. **Решение:** Заметим, что $m^3 > m$ при $m > 1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d \neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m) = m^3 - m + 1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \ldots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.
2. **Решение:** Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3,\ B=-b+1/3, C=-c+1/3$. И, поскольку числа a,b,c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \geq -2/3. \qquad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = -A^3 - A^2 - B^3 - B^2 - C^3 - C^2 + 4/9$, и доказываемое неравенство принимает вид $A^2 + A^3 + B^2 + B^3 + C^2 + C^3 \geq 0$ или $A^2(1+A) + B^2(1+B) + C^2(1+C) \geq 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

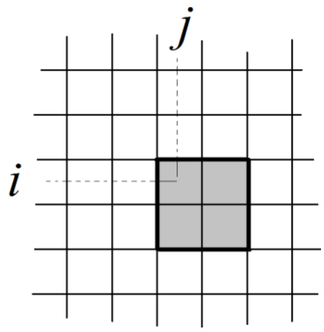
Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что $\max\limits_{0 \leq x \leq 1}\left(x(x-1)^2\right) = 4/27$, *максимум достигается при* $x = 1/3$.

3. **Ответ:** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.
4. **Ответ:** 2085.
5. **Решение:** а) Например, $(i_1, i_2, \ldots, i_9) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+9)+(i_1+\ldots+i_{10}) = a_1+\ldots+a_{10} \pmod{10}$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 45. Но равенство $45+45=45 \pmod{10}$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ есть одинаковые.

6. **Решение:** Пусть сейчас у нас дно ящика уложено плитками двух типов. Поставим каждой плитке в соответствие число. Рассмотрим, к примеру, плитку 1-го типа. Пусть ее верхний левый угол лежит в i-той строке и j-том столбце, то есть имеет координаты (i,j). Остальные три ячейки этой плитки имеют координаты (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1). Сложим координаты всех ее четырех ячеек: $i + j + (i+1) + j + i + (j+1) + (i+1) + (j+1) = 4i + 4j + 4$, затем вычислим остаток от деления на 4 получившейся суммы – это 0. Итак, плитке первого типа мы поставили по определенному правилу в соответствие число (ноль), и, что важно, это число не будет меняться, если плитку передвигать. По такому же правилу, плитка 2-го типа (неважно горизонтальна она или вертикальна), после сложения координат ее ячеек и взятия остатка от деления на 4, получит в

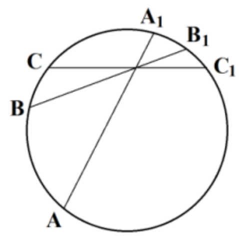
соответствие число 2. Теперь для всех плиток сложим поставленные им в соответствие числа и у полученной суммы вычислим остаток от деления на 4. Получится некоторое число S, которое, очевидно, равно (по модулю 4) сумме координат всех ячеек на дне ящика. Таким образом, S – уникальное число, которое определяется лишь размерами дна ящика (числом строк и столбцов) и *не зависит от способа замощения плитками.* Если бы после замены плитки 1-го типа на плитку 2-ого типа, вновь удалось бы замостить дно, то сумма S изменилась бы на 2, что невозможно.



Ответ: не могло.

7. **Ответ:** 81/2.

8. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно $150^0, 30^0, 60^0$ и 30^0. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.



Решение: Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

1) Пусть угловая мера дуги AB (рис.1) равна φ. (Это означает, что φ равен соответствующий центральный угол AOB.) Тогда длина хорды $AB = 2R\sin(\varphi/2)$. Здесь R – радиус окружности.

2) Пусть две хорды AA_1 и BB_1 пересекаются в точке T (рис.2). Угловые меры дуг AB и A_1B_1 равны φ и v. Треугольники ATB и A_1TB_1 подобны по двум углам (равные углы отмечены). Коэффициент подобия $k = AB / A_1B_1 = \sin(\varphi/2)/\sin(v/2)$.

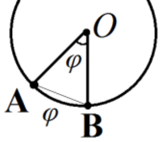


Рис.1

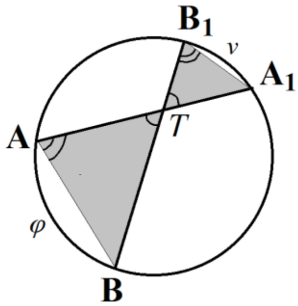


Рис.2

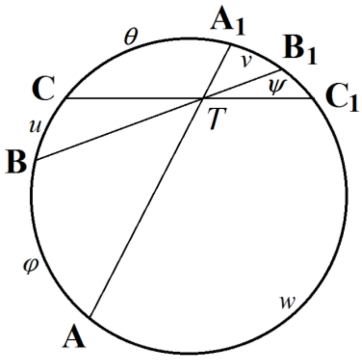


Рис.3

3) Обратимся к рисунку 3. В одной точке, обозначенной Т, пересекаются три хорды. Угловые меры получившихся шести дуг отмечены на рисунке. Из подобия треугольников ATB и A_1TB_1 следует (см. пункт 2) равенство $AT / B_1T = \sin(\varphi/2)/\sin(v/2)$. Аналогично,

$\Delta BTC \sim \Delta B_1TC_1 \Rightarrow B_1T / CT = \sin(\psi/2)/\sin(u/2)$, $\Delta CTA_1 \sim \Delta ATC_1 \Rightarrow CT / AT = \sin(\theta/2)/\sin(w/2)$.

Перемножив три последних равенства, получим:

$$1 = AT / B_1T \cdot B_1T / CT \cdot CT / AT = \sin(\varphi/2)/\sin(v/2) \cdot \sin(\psi/2)/\sin(u/2) \cdot \sin(\theta/2)/\sin(w/2).$$

Таким образом, необходимым (а на самом деле и достаточным) условием того, что три хорды пересекаются в одной точке является равенство:

$$\sin(\varphi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) = \sin(u/2)\sin(v/2)\sin(w/2).$$

Теперь несложно получить ответ в задаче. Подставив в это соотношение данные задачи $w = 150^0, \varphi = 30^0, \theta = 60^0, v = 30^0$, а также выразив u из равенства $\varphi + u + \theta + v + \psi + w = 360^0$, получаем для определения искомого угла ψ следующее уравнение:

$$\sin 15^0 \sin(\psi / 2) \sin 30^0 = \sin 15^0 \sin\left((90^0 - \psi) / 2\right) \sin 75^0.$$

Отсюда несложно получить, что $\psi = 60^0$.

Ответ: 60^0.