

Условия и ответы на задачи заключительного этапа 2013-14 учебный год

1. Степан собрал верное равенство из карточек с изображением чисел и математических знаков. Потом пришёл Миша и перемешал карточки.

$$\boxed{9} \boxed{=} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{7} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{1}$$

(карточка $\boxed{2}$ - возведение в квадрат).

Помогите Степану восстановить исходное равенство.

Ответ: $9^2 - 8^2 = 17$.

2. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$, чтобы сумма всех остальных чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

Ответ: 1007.

3. Определите, во сколько раз число $((2014)^{2^{2014}} - 1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде:

$$((2014)^{2^0} + 1) \cdot ((2014)^{2^1} + 1) \cdot ((2014)^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot ((2014)^{2^{2013}} + 1).$$

Решение обоснуйте.

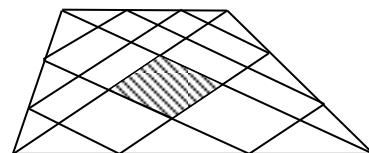
Ответ: 2013.

4. В трапеции, площадь которой равна 1, каждая сторона поделена на три равные части. Соответствующие точки соединены отрезками, как показано на рисунке (рис. 1). Найдите площадь заштрихованной фигуры, если известно, что нижнее основание трапеции в два раза больше верхнего.

Рис. 1

Ответ: $\frac{8}{81}$.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. Найдите сумму всех чисел в таблице.



Ответ: 0.

6. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна 1, а предпоследняя равна 4. Найдите все такие двузначные числа.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

7. Имеются два сосуда. В первом содержится 1 литр 10-ти процентного раствора кислоты, во втором – 2 литра 60-ти процентного. Провели следующее действие, состоящее из двух этапов: на первом этапе из второго сосуда перелили в первый 1 литр раствора, на втором из первого перелили обратно во второй 1 литр полученной смеси. Какое минимальное количество раз нужно проделать такое действие, чтобы концентрация растворов в сосудах отличалась менее чем на 0,1%?

Ответ: 5.

8. Известно, что три квадрата, изображённые на листе в клетку (рис. 2), имеют размеры $n \times n$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на 8.

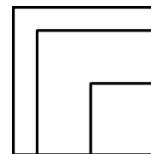


Рис. 2

Критерии определения призов и победителей заключительного этапа
2013-14 учебный год

Максимум за каждую задачу – 3 балла

1-е место: не менее 21 балла;

2-е место: 15-18 баллов;

3-е место: 10 - 14 баллов.