

Условия и ответы на задачи заключительного этапа 2013-14 учебный год

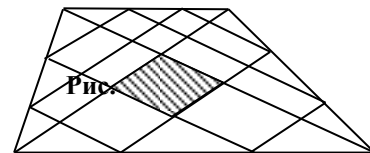
1. Определите, во сколько раз число $((2014)^{2^{2014}} - 1)$ больше, чем число, записанное в следующем виде: $((2014)^{2^0} + 1) \cdot ((2014)^{2^1} + 1) \cdot ((2014)^{2^2} + 1) \cdot \dots \cdot ((2014)^{2^{2013}} + 1)$. Решение обоснуйте.

Ответ: 2013.

2. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{32}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{32}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{32}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{32}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{13\pi}{16}\right)}.$$

3. В трапеции, площадь которой равна **1**, каждая сторона поделена на *три* равные части. Соответствующие точки соединены отрезками, как показано на рисунке (рис. 1). Найдите площадь заштрихованной фигуры, если известно, что нижнее основание трапеции в *два* раза больше верхнего.



Ответ: $\frac{8}{81}$.

4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна **1**, а предпоследняя равна **4**. Найдите *все* такие двузначные числа.

Ответ: 11, 61, 39, 89.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , записано число $a_{i,j} = (-1)^i (2015 - i - j)^2$. Найдите сумму *всех* чисел в таблице.

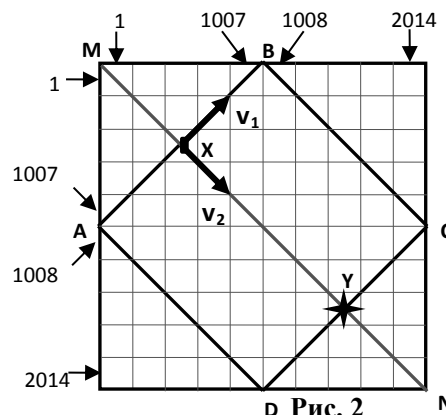
Ответ: 0.

6. Имеются два сосуда. В первом содержится **1** литр **10**-ти процентного раствора кислоты, во втором – **2** литра **60**-ти процентного. Провели следующее действие, состоящее из двух этапов: на первом этапе из второго сосуда перелили в первый **1** литр раствора, на втором из первого перелили обратно во второй **1** литр полученной смеси. Какое

минимальное количество раз нужно проделать такое действие, чтобы концентрация растворов в сосудах отличалась менее чем на **0,1%**?

Ответ: 5.

7. На плоскости изображён квадрат со стороной, равной 2014 клеткам. Диагональ одной клетки равна 1 см. Внутри квадрата расположен еще один квадрат $ABCD$, вершинами которого являются середины сторон исходного квадрата (рис. 2). Из точки X одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 10 \text{ см/сек}$ по часовой стрелке по сторонам квадрата $ABCD$.



Вторая точка начинает двигаться до точки N и далее курсирует по диагонали MN исходного квадрата со скоростью $v_2 = 13 \text{ см/сек}$. Через какое минимальное время они встретятся в точке Y ?

Ответ: 1007 с.

8. Известно, что три квадрата с общим прямым углом, изображённые на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры $n \times n$ клеток, где n – некоторое натуральное число. Докажите, что делая разрезы *только по изображённым линиям*, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на **8**.

Критерии определения призёров и победителей заключительного этапа
2013-14 учебный год

Максимум за каждую задачу – 3 балла

1-е место: не менее 16 баллов

2-е место: 13-15 баллов

3-е место: 8-12 баллов